LICEUL TEORETIC “BOLYAI FARKAS”
ELMÉLETI LÍCEUM
TÎRGU MUREŞ MAROSVÁSÁRHELY
540064
STR. BOLYAI NR.3
Telefon/Fax/0365-882749, 0365-882748
E-mail:bolyai@bolyai.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY
Megyei szakasz,
Marosvásárhely, 2016. december 17.
VII . osztály
MEGOLDÓKULCS

Mindegyik feladat helyes megoldása 10 pontot ér, melyből 1 pont jár hivatalból.

1. Feladat

Igazoljuk a következő egyenlőséget:

$$\frac{1}{1\cdot 11}+\frac{1}{2\cdot 12}+\ldots+\frac{1}{100\cdot 110}=10\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 101}+\frac{1}{2\cdot 102}+\ldots+\frac{1}{10\cdot 110}\right)$$

<u>Megoldás</u>

$$\frac{1}{1\cdot 11}+\frac{1}{2\cdot 12}+\cdots+\frac{1}{100\cdot 110}=\frac{1}{10}\left(\frac{10}{1\cdot 11}+\frac{10}{2\cdot 12}+\cdots+\frac{10}{100\cdot 110}\right)=$$

$$=\frac{1}{10}\left(\frac{11-1}{1\cdot 11}+\frac{12-2}{2\cdot 12}+\cdots\frac{110-100}{100\cdot 110}\right)=$$

$$=\frac{1}{10}\left(\frac{11}{1\cdot 11}-\frac{1}{1\cdot 11}+\frac{12}{2\cdot 12}-\frac{2}{2\cdot 12}+\cdots+\frac{110}{100\cdot 110}-\frac{100}{100\cdot 110}\right)= \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\mathbf{3p}$$

$$=\frac{1}{10}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{11}+\frac{1}{2}-\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{100}-\frac{1}{110}\right)=$$

$$=\frac{1}{10}\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{100}\right)-\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\cdots\frac{1}{110}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{10}\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{110}\right)\right]= \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\mathbf{3p}$$

$$=\frac{1}{10}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{101}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{102}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{110}\right)\right]=\frac{1}{10}\left(\frac{100}{1\cdot 101}+\frac{100}{2\cdot 102}+\cdots+\frac{100}{10\cdot 110}\right)$$

$$=10\left(\frac{1}{1\cdot 101}+\frac{1}{2\cdot 102}+\cdots+\frac{1}{10\cdot 110}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\mathbf{3p}$$

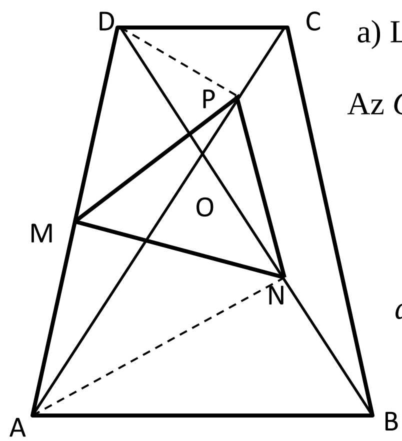
2.Feladat

Az $ABCD$ trapéz, $[AD]\equiv[BC]$, a trapéz (AC) és (BD) átlóinak metszéspontja O és $m(\widehat{AOB}) = 60^\circ$. Az M, N, P pontok az $(AD), (OB),$ valamint (OC) szakaszok felezőpontjai.

a) Igazoljuk, hogy MNP háromszög egyenlő oldalú.

b) Ha AD=16cm, számítsuk ki az MNP háromszög kerületét.

<u>Megoldás</u>



a) Legyen $AD=BC= a$

Az OCB háromszögben NP középvonal, így $NP = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$. (1) …….. **1p**

$[AD] \equiv [BC] \Rightarrow [AO] \equiv [BO],$

$[OD] \equiv [OC],$

$de\ m(\widehat{AOB}) = 60^\circ \Rightarrow AOB_\Delta$ és DOC_Δ egyenlő oldalú.

AN, DP oldalfelező merőlegesek az AOB_Δ és $DOC_\Delta - ben.$

$AND_\Delta - ben\ m(\widehat{N}) = 90^\circ \Rightarrow MN$ oldalfelező $MN = \frac{DA}{2} = \frac{a}{2}$. (2) ………………………… **3p**

$APD_\Delta - ben\ m(\widehat{P}) = 90^\circ \Rightarrow MP$ oldalfelező $MP = \frac{DA}{2} = \frac{a}{2}$. (3) ………………………… **2p**

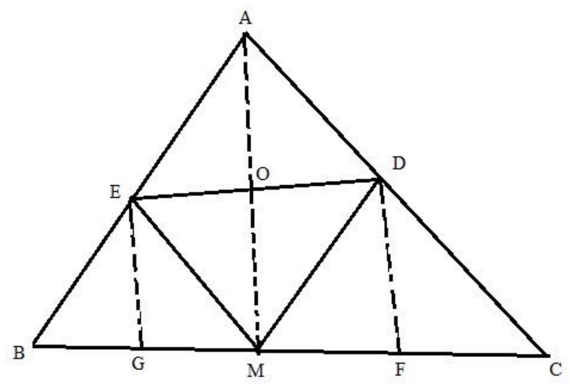
(1),(2),(3) $\Rightarrow MNP_\Delta$ egyenlő oldalú ……………………………………………………….. **1p**

b) $AD=BC$=16cm => $PN = \dfrac{BC}{2} = 8cm$ => $K_{MNP} = 3PN = 24cm$ …………………………... **2p**

3. Feladat

Az ABC háromszögben AM az $\hat{A}$ szög szögfelezője, $M \in (BC)$. Az M ponton át az AB-vel és AC-vel húzott párhuzamosak az AC és AB egyeneseket a D illetve E pontokban metszik. Legyenek DF és EG az $\widehat{MDC}$ illetve $\widehat{MEB}$ szögek szögfelezői, $F, G \in (BC)$. Bizonyítsuk be, hogy $EDFG$ derékszögű trapéz, és számítsuk ki az AM hosszát, ha EG=6cm és DF=10cm.

<u>Megoldás</u>



MD||AE, EM||AD=> ADME paralelogramma; AM szögf.

=>ADME rombusz => $AM \perp ED$ …………………………………………………….**2p**

$$\left.\begin{array}{l} BE \parallel MD \Rightarrow B\hat{E}M \equiv E\hat{M}D \Rightarrow G\hat{E}M \equiv E\hat{M}A \Rightarrow EG \parallel AM \\ DC \parallel EM \Rightarrow C\hat{D}M \equiv D\hat{M}E \Rightarrow F\hat{D}M \equiv D\hat{M}A \Rightarrow DF \parallel AM \end{array}\right\} \Rightarrow EG \parallel DF \Rightarrow EGFD \text{ trapéz}$$

....**2p**

$$\left.\begin{array}{l} m\left(E\hat{O}M\right) = 90^\circ \\ AM \parallel EG \parallel DF \end{array}\right\} \Rightarrow EDFG - \text{ben } m\left(\hat{E}\right) = m\left(\hat{D}\right) = 90^\circ \Rightarrow EGFD \text{ derékszögű trapéz}$$ **2p**

AEMD rombusz=> EO=OD; OM||EG => OM középvonal EDFG trapézban **1p**

$\Rightarrow OM = \dfrac{EG + DF}{2}$. Tehát AM = 2OM=EG + DF = 16cm **2p**

4. Feladat

Egy egyenlő szárú trapéz, egy paralelogramma, egy rombusz és egy téglalap (egyikük sem olyan speciális, hogy másnak is nevezhetnénk) közül az egyikre gondoltunk. Péternek megsúgtuk, hogy annak egyik szöge hány fokos, Pálnak pedig, hogy hány szimmetria tengelye van. Ezek alapján egyikük sem tudta megmondani, melyik négyszögre gondoltunk. Miután beszélgettek egymással megadták a helyes választ. Melyik négyszögre gondoltunk? (Indokoljátok meg a választ!)

<u>Megoldás:</u>

Péternek nem mondhattuk, hogy a szög kilencven fok, mert akkor tudta volna, hogy téglalapról van szó. ……………………………………………………………………………………….. **3p**

Pálnak nem mondhattuk, hogy a négyszögnek nincs szimmetria tengelye, vagy, hogy csak egy szimmetria tengelye van, mert akkor tudta volna, hogy a paralelogramma, vagy a trapéz a válasz. Tehát két szimmetria tengelyt mondtunk így téglalapra, vagy rombuszra gondolhatott. ……..**3p**

Miután beszélgettek megtudták mondani, hogy a felsorolt négyszögek közül a rombuszra gondoltunk, mert annak nincs derékszöge és két szimmetriatengelye van. ………………….**3p**