Országos Magyar Matematikaolimpia
Megyei szakasz, 2019. január 26.
X. osztály

1. Feladat (10 pont)

a) Tudva, hogy $x=\log_a(bc)$, $y=\log_b(ca)$, $z=\log_c(ab)$, $a, b, c\in(0,1)\cup(1,\infty)$, igazold, hogy $x+y+z+2=x\cdot y\cdot z$.

b) Adj példát olyan a, b és c páronként különböző természetes számokra, amelyekre az x, y és z is természetes számok!

2. Feladat (10 pont)

Legyen $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Igazold, hogy $\omega=\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2}\in\mathbb{R}$ akkor és csak akkor, ha $|z|=1$.

3. Feladat (10 pont)

Az ABC háromszögben $\frac{a}{b}=2+\sqrt{3}$ és a C szög mértéke 60°.

a) Igazold, hogy $1+tgAtgB=0$.

b) Számítsd ki az A és a B szög mértékét!

4. Feladat (10 pont)

Oldd meg a $2^{[4x-1]}=\left[\frac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}\right]$ egyenletet a valós számok halmazán, ahol $[x]$ az x valós szám egész részét jelöli.

Minden feladat kötelező. Munkaidő 3 óra.

Országos Magyar Matematikaolimpia 2019
Megyei szakasz, 2019. január 26.

Javítókulcs
X. osztály

1. Feladat (10 pont)

a) Tudva, hogy $x=\log_a(bc)$, $y=\log_b(ca)$, $z=\log_c(ab)$, $a, b, c\in(0,1)\cup(1,\infty)$, igazold, hogy $x+y+z+2=x\cdot y\cdot z$.

b) Adj példát olyan a, b és c páronként különböző természetes számokra, amelyekre az x, y és z is természetes számok!

Megoldás:

Hivatalból .... **1 pont**

a) $x=\log_a(bc)=\dfrac{\lg b+\lg c}{\lg a}$, $y=\log_b(ca)=\dfrac{\lg c+\lg a}{\lg b}$, $z=\log_c(ab)=\dfrac{\lg a+\lg b}{\lg c}$ .. **1 pont**

$$x\cdot y\cdot z=\frac{\lg b+\lg c}{\lg a}\cdot\frac{\lg c+\lg a}{\lg b}\cdot\frac{\lg a+\lg b}{\lg c}=\frac{\left(\lg b\cdot\lg c+\lg a\cdot\lg b+\lg^2 c+\lg a\cdot\lg c\right)\cdot(\lg a+\lg b)}{\lg a\cdot\lg b\cdot\lg c}=$$

$$=\frac{\lg a\cdot\lg b\cdot\lg c+\lg^2 a\cdot\lg b+\lg a\cdot\lg^2 c+\lg^2 a\cdot\lg c+\lg^2 b\cdot\lg c+\lg a\cdot\lg^2 b+\lg b\cdot\lg^2 c+\lg a\cdot\lg b\cdot\lg c}{\lg a\cdot\lg b\cdot\lg c}=$$

.... **2pont**

$$=1+\frac{\lg a}{\lg c}+\frac{\lg c}{\lg b}+\frac{\lg a}{\lg b}+\frac{\lg b}{\lg a}+\frac{\lg b}{\lg c}+\frac{\lg c}{\lg a}+1=$$ .... **2 pont**

$$=2+\frac{\lg(bc)}{\lg a}+\frac{\lg(ca)}{\lg b}+\frac{\lg(ab)}{\lg c}=$$ .... **1 pont**

$=2+\log_a(bc)+\log_b(ca)+\log_c(ab)=x+y+z+2,$ amit igazolni kellett. .... **1 pont**

b) Legyen $z=1$, akkor $x+y+3=xy\Leftrightarrow(x-1)(y-1)=4\ \Rightarrow\ x=2,\ y=5$ ……..….......…**1 pont**

$$\left.\begin{array}{l}x=2\Leftrightarrow a^2=bc\\ y=5\Leftrightarrow b^5=a\cdot c\\ z=1\Leftrightarrow c=a\cdot b\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \begin{cases}a=b^2\\ c=b^3\end{cases}\Rightarrow$$

Például: $b=2, a=4, c=8$, amelyek teljesítik a kért feltételeket. .... **1 pont**

2. Feladat (10 pont)

Legyen $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Igazold, hogy $\omega=\dfrac{1+z+z^2}{1-z+z^2}\in\mathbb{R}$ akkor és csak akkor, ha $|z|=1$.

I. Megoldás: Hivatalból .... **1 pont**

$z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\Rightarrow z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}, b\neq 0$ .... **1 pont**

Akkor $\omega=\dfrac{1+a+bi+a^2-b^2+2abi}{1-a-bi+a^2-b^2+2abi}=$ .... **1 pont**

$=\dfrac{(1+a+a^2-b^2)+b(1+2a)i}{(1-a+a^2-b^2)-b(1-2a)i}=$ .... **1 pont**

$=\dfrac{\left[(1+a+a^2-b^2)+b(1+2a)i\right]\cdot\left[(1-a+a^2-b^2)+b(1-2a)i\right]}{\left[(1-a+a^2-b^2)-b(1-2a)i\right]\cdot\left[(1-a+a^2-b^2)+b(1-2a)i\right]}=$ .... **1 pont**

$=\operatorname{Re}\omega+\dfrac{(1+a+a^2-b^2)b(1-2a)+(1-a+a^2-b^2)b(1+2a)}{(1-a+a^2-b^2)^2+b^2(1-2a)^2}i=$ .... **1 pont**

$=\operatorname{Re}\omega+\dfrac{2(1-a^2-b^2)}{(1-a+a^2-b^2)^2+b^2(1-2a)^2}i\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$ .... **1,5 pont**

$\Leftrightarrow\ \operatorname{Im}\omega=0\ \Leftrightarrow 2(1-a^2-b^2)=0\ \Leftrightarrow$ .... **1,5 pont**

$\Leftrightarrow\ a^2+b^2=1\ \Leftrightarrow\ |z|=1.$ .... **1 pont**

II. Megoldás:

$\omega\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{\omega}=\omega,$ .... **2 pont**

akkor $\dfrac{1+\overline{z}+\overline{z}^2}{1-\overline{z}+\overline{z}^2}=\dfrac{1+z+z^2}{1-z+z^2}\Leftrightarrow -z+\overline{z}+z^2\cdot\overline{z}-z\cdot\overline{z}^2=0\Leftrightarrow$ .... **4 pont**

$(\overline{z}-z)\cdot(1-z\cdot\overline{z})=0\Rightarrow\ \overline{z}=z$, ami ellentmond a $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ feltételnek ....**1 pont**

illetve, $1-z\cdot\overline{z}=0\Leftrightarrow|z|^2=1\Leftrightarrow|z|=1.$ .... **2 pont**

3. Feladat (10 pont)

Az ABC háromszögben $\frac{a}{b}=2+\sqrt{3}$ és a C szög mértéke 60°.

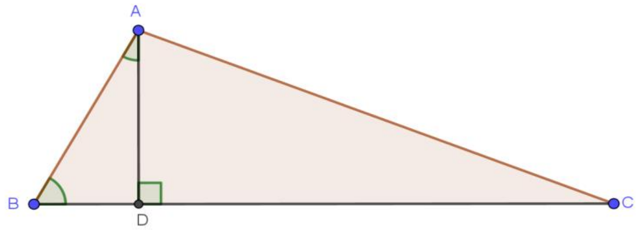
a) Igazold, hogy $1+tgAtgB=0$.
b) Számítsd ki az A és a B szög mértékét!

Hivatalból… ....**1 pont**

I. Megoldás:

a) A feltétel alapján $b<a$, tehát $B<A$, ahonnan kapjuk, hogy a B és a C hegyesszögek, ezért az A-ból húzott magasság talppontja a BC szakaszra esik, az ábrának megfelelően ……...**1.pont**

Az ADC háromszögben a C szög mértéke 60°, ezért az A szög 30°-os.



$CD=\frac{b}{2}$, $AD=\frac{b\sqrt{3}}{2}$ …………**1.pont**

$BD=BC-CD=\frac{3+2\sqrt{3}}{2}b$.

Az ADB háromszögben $tgB=\frac{AD}{DB}=2-\sqrt{3}$ ………………...….**1.pont**

Az ABC háromszögben $tgA=tg(180^\circ-(B+C))=-tg(B+C)=$ ……………………........**1 pont**

$=-\frac{tgB+tgC}{1-tgB\cdot tgC}=-(2+\sqrt{3})$ ………………………………………………………........… **2 pont**

A fentiek alapján $1+tgAtgB=1-(2-\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})=0$ ……………………………….......**1 pont**

b) Az a) alpontban igazolt összefüggést beszorozva $\cos A\cdot\cos B$ -vel $\cos A\cdot\cos B+\sin A\cdot\sin B=0$ összefüggéshez jutunk, vagyis, hogy $\cos(A-B)=0$, ahonnan $A-B=90^\circ$ ……….......…**2 pont**

Mivel $A+B=120^\circ$ azt kapjuk, hogy a B szög mértéke 15° és az A szög mértéke 105° ...**1 pont**

II. Megoldás:

Bármely háromszögben $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$, következik. hogy $\sin A=(2+\sqrt{3})\sin B$ ....………**2 pont**

Mivel a C szög mértéke 60° azt kapjuk, hogy $A+B=120^\circ$ ……………………………....**1 pont**

tehát $\sin(120^\circ-B)=(2+\sqrt{3})\sin B$ ………………………………………………………........**1 pont**

Kifejtve a baloldali kifejezést és átrendezve az egyenlőséget, azt kapjuk, hogy

$\sqrt{3}\cos B=(3+2\sqrt{3})\sin B$. Innen következik, hogy $tgB=2-\sqrt{3}$ ……………………........**2 pont**

ahonnan következik, hogy a B szög mértéke 15°.

Végül következik, hogy az A szög mértéke 105° ………………………………………........…**2 pont**.

A kapott szögek tangensét kiszámolva és behelyettesítve kapjuk a feladat a) alpontjának az eredményét...**1 pont**

III. Megoldás:

A tangenstétel értelmében $\frac{a-b}{a+b}=\frac{tg\frac{A-B}{2}}{tg\frac{A+B}{2}}$, ...**3 pont**

amit a $\frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1}=tg\frac{A-B}{2}tg\frac{C}{2}$ alakba írva ....**2 pont**

a feltételek alapján azt kapjuk, hogy $tg\frac{A-B}{2}=1$, ahonnan az következik, hogy $A-B=90^\circ$. Az $A+B=120^\circ$ és $A-B=90^\circ$ összefüggésekből következik, hogy a B szög mértéke 15° és az A szög mértéke 105°. ....**3 pont**

A kapott szögek tangensét kiszámolva és behelyettesítve kapjuk a feladat a) alpontjának az eredményét...**1 pont**

4. Feladat (10 pont)

Oldd meg a $2^{[4x-1]}=\left[\frac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}\right]$ egyenletet a valós számok halmazán, ahol $[x]$ az x valós szám egész részét jelöli.

Matlap

Hivatalból .... **1 pont**

Megoldás:

Bizonyítjuk, hogy $\frac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}>0$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$. ....**1 pont**

Bizonyítjuk, hogy $\frac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}<7$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\left[\frac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}\right]\le 6$ ....**2 pont**

A fentiek helyett tekinthetjük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}$ *függvényt, és meghatározzuk a függvényértékek halmazát:* $\operatorname{Im}(f)=\left[\frac{10-2\sqrt{19}}{3},\frac{10+2\sqrt{19}}{3}\right]$*, amit szintén **3 pont**ot ér.*

Tehát $\left[\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}\right]\geq 0 \Rightarrow \left[\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}\right]\in\mathbb{N}$, bármely valós x esetén,

ebből következik, hogy $[4x-1]\geq 0 \Rightarrow [4x-1]\in\mathbb{N}$, bármely valós x esetén.

Ezért $2^{[4x-1]}\in\{1,2,4,8,...\}$ és $\operatorname{Im}(f)\cap\mathbb{Z}=\{1,2,3,4,5,6\}$ ....**1 pont**

$\Rightarrow 2^{[4x-1]}\in\{1,2,4\}$ és ebből $\left[\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}\right]\in\{1,2,4\}$ ....**1 pont**

Tárgyalás:

1. eset:

$$2^{[4x-1]}=1\Leftrightarrow\begin{cases}[4x-1]=0\\ \left[\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}\right]=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)\\ x\in\left(-\infty,-2-\sqrt{5}\right]\cup\left[-2+\sqrt{5},\dfrac{2}{3}\right]\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)=M_1$$

....**1 pont**

2. eset:

$$2^{[4x-1]}=2\Leftrightarrow\begin{cases}[4x-1]=1\\ \left[\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}\right]=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right)\\ x\in\left(-\infty,-2-\sqrt{5}\right]\cup\left[-2+\sqrt{5},\infty\right)\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right)=M_2$$

....**1 pont**

3. eset:

$$2^{[4x-1]}=4\Leftrightarrow\begin{cases}[4x-1]=2\\ \left[\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}\right]=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left[\dfrac{3}{4},1\right)\\ x\in\left[\dfrac{-3-\sqrt{6}}{3},\dfrac{-7-\sqrt{17}}{8}\right)\cup\left(\dfrac{-7+\sqrt{17}}{8},\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}\right]\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing=M_3$$

....**1 pont**

$M=M_1\cup M_2\cup M_3=\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)\cup\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right)\cup\varnothing=\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right).$ ....**1 pont**