Országos Magyar Matematika Olimpia
Megyei szakasz, 2019. január 26.
XII. osztály

1. Feladat (10 pont) Adottak az $f, g : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ deriválható függvények, amelyeknek deriváltjai folytonosak.

a) Igazold, hogy $\int [f'(x) + f(x)g'(x)]e^{g(x)}dx = f(x)\cdot e^{g(x)} + C$;

b) Számítsd ki: $\int \frac{x^2 \ln x - \ln x + x}{x^2} \cdot e^{x+\frac{1}{x}} dx$ integrált, ahol $x > 0$!

(Matlap)

2. Feladat (10 pont) Számítsd ki :

a) az $I - J$ integrált, ha $I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ és $J = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$;

b) $\int \frac{e^x + \cos x}{e^x + \cos x + \sin x} dx, x > 0$ integrált!

3. Feladat (10 pont) Öt számkártyára felírtuk az $1, 2, 3, 4$ és 5 számokat, minden kártyára pontosan egyet. Az öt számkártyát elhelyezzük az egymás mellett lévő X , Y és Z dobozokba. Hány olyan elhelyezése van a számkártyáknak, amelyekben az X jelű dobozban levő számkártyákra írt számok összege osztható 5 -tel? (Ha egy dobozba egy számkártya kerül, akkor az ezen levő számot tekintjük a számkártyán lévő számok összegének. Üres doboz esetén az összeg 0.)

4. Feladat (10 pont) A $G = (1; \infty)$ halmazon értelmezett az $x \circ y = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2}$ belső művelet $\forall\, x, y \in G$ esetén.

a) Igazold, hogy $(G, \circ)$ Ábel-féle csoport;

b) Határozd meg az m, n valós számokat úgy, hogy az $f : (0, \infty) \to (1, \infty)$ függvény, ahol $f(x) = \sqrt{mx + n}$ egy izomorfizmust valósítson meg az $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ és a $(G, \circ)$ csoportok közt;

c) Számítsd ki $\sqrt{\frac{2\cdot 1^2 + 2}{1^2 + 1 + 1}} \circ \sqrt{\frac{2\cdot 2^2 + 2}{2^2 + 2 + 1}} \circ \ldots \circ \sqrt{\frac{2\cdot n^2 + 2}{n^2 + n + 1}}$ értékét!

Minden feladat kötelező. Munkaidő 3 óra.

Országos Magyar Matematika Olimpia
Megyei szakasz, 2019. január 26.

Javítókulcs
XII. osztály

1. Feladat (10 pont) Adottak az $f, g : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ deriválható függvények, amelynek deriváltjai folytonosak.

a) Igazold, hogy $\int [f'(x) + f(x)g'(x)]e^{g(x)}dx = f(x)\cdot e^{g(x)} + C$;

b) Számítsd ki: $\int \frac{x^2 \ln x - \ln x + x}{x^2} \cdot e^{x+\frac{1}{x}} dx$ integrált, ahol $x > 0$!

(Matlap 10- L:2951/2018)

Megoldás:

Hivatalból 1p

a) $\left[f(x)\cdot e^{g(x)}\right]' = f'(x)\cdot e^{g(x)} + f(x)\cdot e^{g(x)}\cdot g'(x) = [f'(x) + f(x)\cdot g'(x)]e^{g(x)}$. ……..........…4p

b) $\int \frac{x^2 \ln x - \ln x + x}{x^2} \cdot e^{x+\frac{1}{x}} dx =$

$\int \left[\frac{(x^2-1)\ln x}{x^2} + \frac{1}{x}\right] \cdot e^{x+\frac{1}{x}} dx =$

$\int \left[\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ln x + \frac{1}{x}\right] \cdot e^{x+\frac{1}{x}} dx =$ ……………………………………………………….1p

$f(x) = \ln x$ tehát $f'(x) = \frac{1}{x}$ ……………………………………………………………1p

$g(x) = x + \frac{1}{x}$ ahonnan $g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ ………………………………………………....1p

$\int [f'(x) + f(x)g'(x)]e^{g(x)}dx = f(x)\cdot e^{g(x)} + C =$

$= \ln x \cdot e^{x+\frac{1}{x}} + C$.
……………………………………………………………………………….2p

2. Feladat (10 pont) Számítsd ki :

a) az $I - J$ integrált, ha $I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ és $J = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$;

b) $\int \frac{e^x+\cos x}{e^x+\cos x+\sin x}dx, x>0$ integrált!

Megoldás:

Hivatalból 1p

a) $I-J=\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx= -\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=$ 1p

$-\int \frac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}dx=$ 2p

$-\ln(\sin x+\cos x)+c$. 2p

b)

Legyen $I=\int \frac{e^x+\cos x}{e^x+\cos x+\sin x}dx$ és $J=\int \frac{\sin x}{e^x+\cos x+\sin x}dx$ 1p

Ekkor $I+J=x+C_1$ 1p

$I-J=\ln\left(e^x+\cos x+\sin x\right)+C_2$. 1p

Összegezve az egyenlőségeket kapjuk, hogy $I=\frac{1}{2}\left(x+\ln\left(e^x+\cos x+\sin x\right)\right)+C$. 1p

3. Feladat (10 pont) Öt számkártyára felírtuk az $1,2,3,4$ és 5 számokat, minden kártyára pontosan egyet. Az öt számkártyát elhelyezzük az egymás mellett lévő X , Y és Z dobozokba. Hány olyan elhelyezése van a számkártyáknak, amelyekben az X jelű dobozban levő számkártyákra írt számok összege osztható 5 -tel? (Ha egy dobozba egy számkártya kerül, akkor az ezen levő számot tekintjük a számkártyán lévő számok összegének. Üres doboz esetén az összeg 0.)

Megoldás:

Ha az X dobozba nem kerül kártya, akkor az öt számkártyát az Y és Z dobozokba 2^5 -féleképpen helyezhetjük el. 1p

Ha az X dobozba egy számkártya kerül, akkor az csak az 5 lehet, a fennmaradó négyet az Y és Z dobozokba 2^4 -féleképpen tehetjük. 1p

Ha az X dobozba két számkártya kerül, akkor azokon az 1 és 4 vagy a 2 és 3 szerepelhet. Így a megmaradt számkártyákat az Y és Z dobozokba 2^3 -féleképpen tehetjük. 2p

Ha az X dobozba három számkártya kerül, akkor azokon $1,4,5$ vagy $2,3,5$ számok szerepelhetnek. Így a megmaradt számkártyákat az Y és Z dobozokba 2^2 -féleképpen tehetjük. 2p

Ha az X dobozba négy számkártya kerül, akkor azokon $1,2,3$ és 4 számok szerepelhetnek. Így a megmaradt számkártyákat az Y és Z dobozokba 2 -féleképpen tehetjük. 1p

Ha mind az 5 számkártya az X dobozba kerül, akkor ez egyféleképpen lehetséges. 1p

Tehát az elhelyezések száma: $2^5+2^4+2\cdot 2^3+2\cdot 2^2+2+1=75$ 1p

4. Feladat (10 pont) A $G=(1;\infty)$ halmazon értelmezett az $x\circ y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}$ belső művelet $\forall x,y\in G$ esetén.

a) Igazold, hogy $(G,\circ)$ Ábel-féle csoport;

b) Határozd meg az m,n valós számokat úgy, hogy az $f:(0,\infty)\to(1,\infty)$ függvény, ahol $f(x)=\sqrt{mx+n}$ egy izomorfizmust valósítson meg az $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ és a $(G,\circ)$ csoportok közöt;

c) Számítsd ki $\sqrt{\frac{2\cdot 1^2+2}{1^2+1+1}}\circ\sqrt{\frac{2\cdot 2^2+2}{2^2+2+1}}\circ\ldots\circ\sqrt{\frac{2\cdot n^2+2}{n^2+n+1}}$ értékét!

Megoldás:

Hivatalból 1p

a) Asszociativítás kimutatása...1p
Kommutativítás..1p
$e=\sqrt{2}\in(1;\infty)$ 1p
$x'=\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}=\sqrt{1+\frac{1}{x^2-1}}>1$ tehát $x'\in G$ szimmetrikus elem.................................1p

b) $f(x\cdot y)=f(x)\circ f(y)\iff\sqrt{mxy+n}=\sqrt{mx+n}\circ\sqrt{my+n}=$
$=\sqrt{m^2xy+m(n-1)x+m(n-1)y+mn-2n+2}$ innen kapjuk, hogy

$\begin{cases}m^2=m\\ m(n-1)=0\\ mn-2n+2=n\end{cases}$ ahonnan $m\in\{0,1\}$, de mivel f nem lehet konstans függvény .

Innen következik, hogy $n=0$. 1p
$f(x)=\sqrt{x+1}$ bijektív..1p

c) Ha az $f:(0,\infty)\to(1,\infty)$, $f(x)=\sqrt{x+1}$ izomorfizmus a $(\mathbb{R}_+^*;\cdot)$ és $(G,\circ)$ között, akkor az $f^{-1}:(1,\infty)\to(0,\infty)$, $f^{-1}(x)=x^2-1$ is izomorfizmus a $(G,\circ)$ és $(\mathbb{R}_+^*;\cdot)$ között............1p

Jelöljük $x_1=\sqrt{\frac{2\cdot 1^2+2}{1^2+1+1}}$, $x_2=\sqrt{\frac{2\cdot 2^2+2}{2^2+2+1}}$,..., $x_n=\sqrt{\frac{2\cdot n^2+2}{n^2+n+1}}$,

ekkor $f^{-1}(x_1)=\frac{2\cdot 1^2+2}{1^2+1+1}-1=\frac{1^2-1+1}{1^2+1+1}$, $f^{-1}(x_2)=\frac{2\cdot 2^2+2}{2^2+2+1}-1=\frac{2^2-2+1}{2^2+2+1}$,...,

$f^{-1}(x_n)=\frac{2\cdot n^2+2}{n^2+n+1}-1=\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}$.

$$\prod_{k=1}^{n} f^{-1}(x_k)=\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2-k+1}{k^2+k+1}=\ \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)^2-(n-1)+1}{(n-1)^2+(n-1)+1}\cdot\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}=$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-3n+3}{n^2-n+1}\cdot\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}=\frac{1}{n^2+n+1}$$ 1p

$$x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n=f\left(\prod_{k=1}^{n} f^{-1}(x_k)\right)=f\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)=\ \sqrt{\frac{1}{n^2+n+1}+1}=\ \sqrt{\frac{n^2+n+2}{n^2+n+1}}$$ 1p