Országos Magyar Matematika Olimpia
Megyei szakasz, 2019. január 26.
XI. osztály

1. Feladat (10 pont)

a.) Kétféleképpen kiszámítva az $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$ mátrix determinánsát, igazold az alábbi egyenlőséget:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)$$

b) Ha $a,b,c\in\mathbb{R}$ és $a+b+c=1$, igazold, hogy $\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\geq abc$.

2. Feladat (10 pont)

Az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük: $x_{n+1}=x_n+\frac{3}{x_n}$, $x_0=1$.

a) Igazold, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$!

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{n}$ határértéket!

c) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x_n}$ határértéket!

3. Feladat (10 pont)

Adott az $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{C})$ mátrix.

a) Számítsd ki az A^n, $n\in\mathbb{N}^*$ mátrixot!

b) Számítsd ki $\det(A^n)$, $n\in\mathbb{N}^*$ értékét!

(Matlap)

4. Feladat (10 pont)

Igazold, hogy az 1, 2, 3, ..., 2019 számok közül nem választható ki 100 olyan szám, amelyekből bármely kettőt összeadva, az így képezhető kéttagú összegek mind különbözzenek egymástól!

Minden feladat kötelező. Munkaidő 3 óra.

Országos Magyar Matematika Olimpia
Megyei szakasz, 2019. január 26.

Javítókulcs
XI. osztály

1. Feladat (10 pont)

a.) Kétféleképpen kiszámítva az $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$ mátrix determinánsát, igazold az alábbi egyenlőséget:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

b) Ha $a,b,c\in\mathbb{R}$ és $a+b+c=1$, igazold, hogy $\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\geq abc$.

(Betuker Enikő, Mastan Eliza, Szilágyi Judit)

Megoldás
Hivatalból 1p

a) $\det A=\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=a^3+b^3+c^3-3abc$ 2p

$\det A=\begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}=$ 1p

$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix}=$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$ 2p

b) Ha $a+b+c=1$, akkor az a) alpont alapján $a^3+b^3+c^3-3abc=a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$. 1p

$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=\frac{1}{2}\left[a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2\right]=$ 1p

$=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(a-c)^2+(c-b)^2\right]\geq 0$. 1p

Tehát $a^3+b^3+c^3-3abc\geq 0$, innen :

$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\geq abc$. 1p

2. Feladat (10 pont)

Az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük: $x_{n+1}=x_n+\frac{3}{x_n}$, $x_0=1$.

a) Igazold, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$!

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{n}$ határértéket!

c) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x_n}$ határértéket!

(Zákány Mónika)

Megoldás

Hivatalból 1p

a) Indukcióval igazoljuk, hogy $x_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. 1p

$x_{n+1}-x_n=\frac{3}{x_n}>0 \Rightarrow (x_n)_{n\geq 0}$ sorozat szigorúan növekvő 1p

Mivel $(x_n)_{n\geq 0}$ szigorúan növekvő $\Rightarrow$ ha $(x_n)_{n\geq 0}$ korlátos, akkor létezik $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=l\in\mathbb{R}$, ha pedig $(x_n)_{n\geq 0}$ nem korlátos, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$. 1p

Feltételezzük, hogy a sorozat korlátos és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=l\in\mathbb{R}$. Határértékre térve a rekurzióban: $l=l+\frac{3}{l}\Rightarrow\frac{3}{l}=0$ ellentmondás, tehát a sorozat nem korlátos és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$. 1p

b) Legyen $a_n=x_n^2$ és $b_n=n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. A $(b_n)_{n\geq 0}$ sorozat szigorúan növekvő és korlátos. (1) 1p

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^2-x_n^2}{n+1-n}=\lim_{n\to\infty}\left(x_n+\frac{3}{x_n}\right)^2-x_n^2=\lim_{n\to\infty}\left(6+\frac{9}{x_n^2}\right)=6\ (2)$$

(1) és (2) Cesaro-Stolz tétele alapján $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=6$ 2p

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right]^{\frac{x_n}{\sqrt{n}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}}$ 1p

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)^2=\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)^2$ és a b) alapján $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)^2=6$.

Mivel $\frac{x_n}{\sqrt{n}}>0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)=\sqrt{6}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x_n}=e^{\sqrt{6}}$ 1p

3. Feladat (10 pont)

Adott az $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{C})$ mátrix.

a) Számítsd ki az A^n mátrixot!

b) Számítsd ki $\det\left(A^n\right)$ értékét!

(Matlap)

Megoldás

Hivatalból 1p

$A^2=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ 1p

$A^3=\begin{pmatrix}2 & 3 & 3\\ 3 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 2\end{pmatrix}$ 1p

Igazoljuk, indukcióval, hogy $A^n=\begin{pmatrix}x_n & y_n & y_n\\ y_n & x_n & y_n\\ y_n & y_n & x_n\end{pmatrix}$ alakú és

$A^{n+1}=\begin{pmatrix}2y_n & x_n+y_n & x_n+y_n\\ x_n+y_n & 2y_n & x_n+y_n\\ x_n+y_n & x_n+y_n & 2y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{n+1} & y_{n+1} & y_{n+1}\\ y_{n+1} & x_{n+1} & y_{n+1}\\ y_{n+1} & y_{n+1} & x_{n+1}\end{pmatrix}.$ 1p

Innen :

$\begin{cases}x_{n+1}=2y_n\\ y_{n+1}=x_n+y_n\end{cases}$

Tehát $\begin{cases}x_n=y_{n+1}-y_n\\ y_{n+2}=y_{n+1}+2y_n\end{cases}.$ 1p

A második lineáris rekurencia karakterisztikus egyenlete $r^2-r-2=0$, melynek megoldásai 2 és -1, tehát $y_n=A\cdot 2^n+B\cdot(-1)^n$. 1p

Az $y_1=1$ és $y_2=1$ feltételekből $A=\frac{1}{3}$ és $B=-\frac{1}{3}$. 1p

Innen $y_n=\frac{1}{3}\cdot 2^n-\frac{1}{3}\cdot(-1)^n$

és $x_n=\frac{2}{3}\cdot 2^{n-1}-\frac{2}{3}\cdot(-1)^{n-1}$. 1p

b)

Tudjuk, hogy $\det\left(A^n\right)=(\det A)^n$ 1p

Mivel $\det A=2 \Rightarrow \det\left(A^n\right)=2^n$ 1p

4. Feladat (10 pont)

Igazold, hogy az 1, 2, 3, ..., 2019 számok közül nem választható ki 100 olyan szám, amelyekből bármely kettőt összeadva, az így képezhető kéttagú összegek mind különbözzenek egymástól!

(Szilágyi Judit)

Megoldás

Hivatalból 1p

Az 1, 2, ..., 2019 számokból képezhető

legkisebb kéttagú összeg $1+2=3$, illetve 1p

legnagyobb kéttagú összeg $2018+2019=4037$ 1p

emiatt a 2019 számból legtöbb 4035 különböző összeget kaphatunk. 2p

Ha a 2019 számból kiválasztunk 100 számot, ezekből nyilvánvalóan nem kaphatunk ennél több különböző összeget. 1p

Száz számból $C_{100}^{2}=4950$ számpárt alkothatunk, tehát 4950 összeget képezhetünk. 3p

Mivel $4950>4037$ ezek nem lehetnek mind különbözőek. 1p