Országos Magyar Matematika Olimpia
Megyei szakasz, 2019. január 26.
IX. osztály

1. Feladat (10 pont)

Adott az $a = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}} + \ldots + \dfrac{\sqrt{9}-\sqrt{10}}{\sqrt{90}}$ valós szám.

a) Számítsd ki az a szám egész részét.

b) Oldd meg az egész számok halmazán az $\left[\dfrac{x+1}{2}\right] = 2019[a]$ egyenletet, ahol $[t]$ az t valós szám egész részét jelöli.

2. Feladat (10 pont)

Igazold, hogy

a) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a+b}$ bármely a, b pozitív valós szám esetén;

b) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{4}{c} \geq \dfrac{16}{a+b+c}$ bármely a, b, c pozitív valós szám esetén;

c) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{4}{c}+\dfrac{16}{d} \geq \dfrac{64}{a+b+c+d}$ bármely a, b, c, d pozitív valós szám esetén!

3. Feladat (10 pont)

Adott az ABC háromszög és E, D és F pontok úgy, hogy $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$ és $\overrightarrow{CF} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CE}$.

Igazold, hogy a) az A, F és D pontok kollineárisak;

b) $\dfrac{T_{FEA_\Delta}}{T_{FDC_\Delta}} = 3$.

4. Feladat (10 pont)

Egy kör alakú 1 kg tömegű pizzát egyenes vágásokkal darabokra osztunk. Ha tudjuk, hogy két vágás átmegy a pizza közepén, a harmadik pedig nem, bizonyítsd be, hogy létezik egy olyan darab, amelynek tömege legalább 166 g. *(Matlap)*

Minden feladat kötelező. Munkaidő 3 óra.

Országos Magyar Matematika Olimpia
Megyei szakasz, 2019. január 26.

Javítókulcs

IX. osztály

1. Feladat (10 pont)

Adott az $a=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}}+\ldots+\dfrac{\sqrt{9}-\sqrt{10}}{\sqrt{90}}$ valós szám.

a) Számítsd ki az a szám egész részét.

b) Oldd meg az egész számok halmazán az $\left[\dfrac{x+1}{2}\right]=2019[a]$ egyenletet, ahol $[t]$ az t valós szám egész részét jelöli.

(Oláh-Ilkei Árpád, Barót)

Megoldás:

Hivatalból **1pont**

a) $a=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}}+\ldots+\dfrac{\sqrt{9}-\sqrt{10}}{\sqrt{90}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{10}}-\dfrac{1}{\sqrt{9}}=$ **1pont**

$=\dfrac{1}{\sqrt{10}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}\left(1-\sqrt{5}\right)}{10}$ **1pont**

$\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}\Rightarrow -2<1-\sqrt{5}<-1$ **1pont**

$3<\sqrt{10}<4\Rightarrow -6<\sqrt{10}\left(1-\sqrt{5}\right)<-4$ **1pont**

$\Rightarrow -1<-0,6<a<-0,4<0$ **1pont**

$\Rightarrow [a]=-1$ **1pont**

b) $x\in\mathbb{Z},\ \left[\dfrac{x+1}{2}\right]=2019[a]$

$\left[\dfrac{x+1}{2}\right]=-2019\Rightarrow -2019\le\dfrac{x+1}{2}<-2018$ **1pont**

$-4039\le x<-4037$ és $x\in\mathbb{Z}$ **1pont**

$M=\{-4039;-4038\}$ **1pont**

2. Feladat (10 pont)

Igazold, hogy

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$ bármely a, b pozitív valós szám esetén;

b) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}\geq\frac{16}{a+b+c}$ bármely a, b, c pozitív valós szám esetén;

c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}$ bármely a, b, c, d pozitív valós szám esetén!

(Nagy Olga, Nagyszalonta)

Megoldás:

Hivatalból **1pont**

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}\Leftrightarrow\frac{a+b}{ab}\geq\frac{4}{a+b}\quad(1)$

$a+b>0\Rightarrow(1)\Leftrightarrow\frac{(a+b)^2}{ab}\geq 4\quad(2)$ **1pont**

$ab>0\Rightarrow(2)\Leftrightarrow(a+b)^2\geq 4ab$ **1pont**

$(a+b)^2\geq 4ab\Leftrightarrow(a-b)^2\geq 0$, evidens bármely a, b pozitív valós szám esetén **1pont**

Megjegyzés: Az egyenlőség fennáll, ha $a=b$.

b) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}\overset{a)}{\geq}\frac{4}{a+b}+\frac{4}{c}\quad(3)$ **1pont**

és $\frac{4}{a+b}+\frac{4}{c}=4\cdot\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}\right)\overset{a)}{\geq}4\cdot\frac{4}{a+b+c}=\frac{16}{a+b+c}\quad(4)$ **1pont**

$(3)\ \textit{és}\ (4)\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}\geq\frac{16}{a+b+c}$ igaz, bármely a, b, c pozitív valós szám esetén, **1pont**

Megjegyzés: Az egyenlőség fennáll, ha $a=b$ és $a+b=c$ és $a+b+c=d$.

c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\overset{b)}{\geq}\frac{16}{a+b+c}+\frac{16}{d}\quad(5)$ **1pont**

$\frac{16}{a+b+c}+\frac{16}{d}=16\cdot\left(\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{d}\right)\overset{a)}{\geq}16\cdot\frac{4}{a+b+c+d}\quad(6)$ **1pont**

$(5)\ \textit{és}\ (6)\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}$ igaz bármely a, b, c, d pozitív valós szám esetén. **1pont**

Megjegyzés: Az egyenlőség fennáll, ha $a=b$ és $a+b=c$ és $a+b+c=d$.

3. Feladat (10 pont)

Adott az ABC háromszög és E, D és F pontok úgy, hogy $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$ és $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$

Igazold, hogy a) az A, F és D pontok kollineárisak;

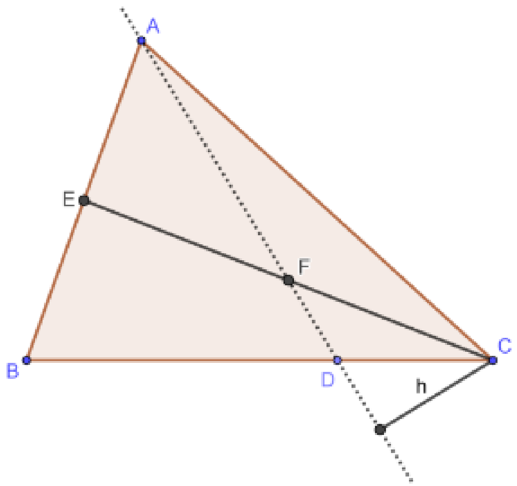
b) $\frac{T_{FEA_{\Delta}}}{T_{FDC_{\Delta}}} = 3$.

(Szőts Ildikó, Brassó és Spier Tünde, Arad)

Megoldás:

Hivatalból **1pont**

Rajz



1pont

a) $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad (1)$ **1pont**

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \overset{(1)}{\Rightarrow} \overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right) \quad (2)$ **1pont**

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right) \quad (3)$ **1pont**

$(3) \Rightarrow 3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \quad (4)$

$(2)\text{és}(4) \Rightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ **1pont**

b) Mivel F felezőpontja az EC -nek, $T_{AEF} = T_{AFC} \quad (5)$ **1pont**

Legyen h a CFD háromszög C -ből húzott magassága, amely megegyezik az AFC háromszög C -ből húzott magasságával.

$\frac{T_{AEF}}{T_{FDC}} \overset{(5)}{=} \frac{T_{AFC}}{T_{FDC}} = \frac{AF \cdot \frac{h}{2}}{FD \cdot \frac{h}{2}} = \frac{AF}{FD} \quad (6)$ **1pont** az $a) \Rightarrow \dfrac{AF}{FD} = 3 \quad (7)$ **1pont**

$(6) \text{és} (7) \Rightarrow \dfrac{T_{FEA_\Delta}}{T_{FDC_\Delta}} = 3$. **1pont**

4. Feladat (10 pont)

Egy kör alakú 1 kg tömegű pizzát egyenes vágásokkal darabokra osztunk. Ha tudjuk, hogy két vágás átmegy a pizza közepén, a harmadik pedig nem, bizonyítsd be, hogy létezik egy olyan darab, amelynek tömege legalább 166 g.

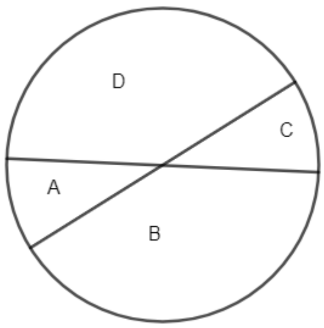
(Matlap, 2893.feladat, 7szám/2018)

Megoldás:

Hivatalból **1pont**

A két vágással, amely átmegy a pizza közepén négy részre osztják a pizzát, A, B, C és D, ezek közül két-két rész szimmetrikus: A és C, valamint B és D.

2pont



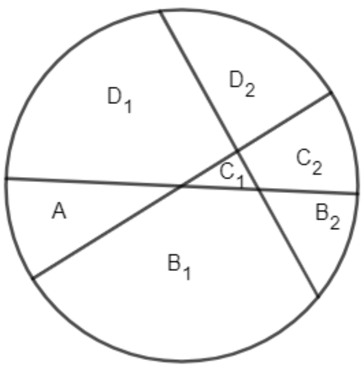
A harmadik vágás, amely nem megy át a középponton, a négy részből maximum hármat vághat el, így a harmadik vágás után öt, hat vagy hét darabot kaphatunk. **2pont**

Ha öt darabot kapunk, akkor a skatulya-elv alapján létezik legalább egy darab, amelynek tömege legalább 1000:5=200 (g), (tehát legalább 166 g). **1pont**

Ha a pizzát hat részre osztottuk, akkor szintén a skatulya-elv alapján egy darab tömege: 1000:6=166,(6), ami legalább 166 g.

1pont

Tekintsük a harmadik esetben a következő ábrát (amikor hét részre osztjuk a pizzát):



A $D_1, D_2, C_1 \cup C_2, B_1, B_2$ és A részek tömege összesen 1 kg, így egy darab tömege: 1000:6=166,(6), ami legalább 166 g.

1pont

Ha a fenti részekből a D_1, D_2, B_1, B_2 *vagy* A tömege legalább 166 g, akkor a feladat megoldását befejeztük. **1pont**

Ha pedig a $C_1 \cup C_2$ rész tömege legalább 166 g, akkor szintén befejeztük a feladat megoldását, mert $C_1 \cup C_2 = A$.

1pont