LICEUL TEORETIC "BOLYAI FARKAS"
ELMÉLETI LÍCEUM
TÎRGU MUREŞ   MAROSVÁSÁRHELY
540064
STR. BOLYAI NR.3
Telefon/Fax/0365-882749, 0365-882748
E-mail:bolyai@bolyai.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY

Megyei szakasz,
Marosvásárhely, 2016. december 17.
X. osztály

1. feladat

Oldd meg a természetes számok halmazán a következő egyenletet:

$$2^{\sqrt{2x\cdot\log_2 x}}+x^{\sqrt{2x\cdot\log_x 2}}=2^x+x^2.$$

Megoldás:

A létezési feltételek bármely $x\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ esetén teljesülnek……………………………………………………………………………1p

Igazoljuk, hogy: $2^{\sqrt{2x\cdot\log_2 x}}=x^{\sqrt{2x\cdot\log_x 2}}$.

Logaritmálva: $\sqrt{2x\cdot\log_2 x}=\sqrt{2x\cdot\log_x 2}\cdot\log_2 x\Leftrightarrow\sqrt{2x\cdot\log_2 x}=\sqrt{2x\cdot\log_x 2\cdot(\log_2 x)^2}$
$\Leftrightarrow\sqrt{2x\cdot\log_2 x}=\sqrt{2x\cdot\log_2 x}$
(igaz)……2p

Az egyenlet: $2^{\sqrt{2x\cdot\log_2 x}}=\frac{2^x+x^2}{2}$

$2^{\sqrt{2x\cdot\log_2 x}}=2^{\sqrt{x\cdot\log_2 x^2}}\leq 2^{\frac{x+\log_2 x^2}{2}}=\sqrt{2^x\cdot 2^{\log_2 x^2}}=\sqrt{2^x\cdot x^2}\leq\frac{2^x+x^2}{2}$……………………………………………………………3p

Mivel a középarányosok egyenlőtlenségét alkalmaztuk, egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha:
$x=\log_2 x^2\Leftrightarrow 2^x=x^2$……………………………………………………………………………………………………
……………………………2p

A $2^x=x^2$ egyenletnek az $\mathbb{N}^*-\{1\}$ halmazban az $x_1=2, x_2=4$ megoldásai vannak……………………………………………1p

Hivatalból……………………………………………………………………………1p

2. feladat

Határozd meg az összes olyan komplex számot, amelyekre $|z_1|=|z_2|=1$ és $|z_1+z_2+2|=|z_1\cdot z_2-1|$.

Megoldás:

$z_1\cdot\overline{z_1}=z_2\cdot\overline{z_2}=1$……………………………………………………………………………………………………1p

$|z_1+z_2+2|=|z_1\cdot z_2-1|\Rightarrow(z_1+z_2+2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}+2)=(z_1z_2-1)(\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}-1)\Leftrightarrow$……………………………………2p

$|z_1|^2+z_1\overline{z_2}+2z_1+z_2\overline{z_1}+|z_2|^2+2z_2+2\overline{z_1}+2\overline{z_2}+4=|z_1|^2\cdot|z_2|^2-z_1z_2-\overline{z_1z_2}+1\Leftrightarrow$………………………1p

$z_1(z_2+\overline{z_2})+\overline{z_1}(z_2+\overline{z_2})+2(z_1+z_2+\overline{z_1}+\overline{z_2})+4=0$

$(z_1+\bar{z_1})(z_2+\bar{z_2})+2(z_1+z_2+\bar{z_1}+\bar{z_2})+4=0$..2p

Ha $z_1=x_1+y_1 i$, $z_2=x_2+y_2 i$ és $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2=1$, akkor az előbbi összefüggésből:

$(x_1+1)(x_2+1)=0$...1p

I. $\begin{cases} x_1=-1 \\ y_1=0 \end{cases}$ és $x_2^2+y_2^2=1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$..1p

vagy

II. $\begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=0 \end{cases}$ és $x_1^2+y_1^2=1, x_1, y_1 \in \mathbb{R}$..1p

Tehát $z_1=-1, |z_2|=1$ vagy $z_2=-1, |z_1|=1$.

Hivatalból...1p

3. feladat

Egy 2017 oldalú körbeírható sokszögnek 1009 kongruens szöge van. Igazold, hogy a sokszögnek van két kongruens oldala.

Megoldás:

Jelöljük a sokszög csúcsait A_i-vel $i=\overline{1,2017}$. A feltételből következik, hogy a sokszögnek van két egymás melletti kongruens szöge, legyenek ezek $\bar{A}_{\bar{\imath}+\bar{1}}$ és $\bar{A}_{\bar{\imath}+\bar{2}}$. 3p

Az $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ sokszög körbeírható és mivel $\bar{A}_{\bar{\imath}+\bar{1}} \equiv \bar{A}_{\bar{\imath}+\bar{2}}$ következik, hogy $\bar{A}_{\bar{\imath}} \equiv \bar{A}_{\bar{\imath}+\bar{3}}$ (kiegészítő szögeik kongruensek)...3p

Tehát: $A_iA_{i+3} \parallel A_{i+1}A_{i+2}$, de $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ körbeírható, következésképpen egy körbeírható trapéz, azaz egyenlő szárú, és így $A_iA_{i+1}=A_{i+2}A_{i+3}$...3p

Hivatalból...1p

4. feladat

Legtöbb hány számot választhatunk ki az 1, 2, 3, 4, ..., 49, 50 számok közül úgy, hogy bármely kettő összege ne legyen osztható 7-tel.

Megoldás:

Az 1, 2, 3, 4, ..., 49, 50 számokat a következő halmazokba soroljuk:

$A_0=\{7,14,21,28,35,42,49\}$, $A_1=\{1,8,15,22,29,36,43,50\}$, $A_2=\{2,9,16,23,30,37,44\}$,
$A_3=\{3,10,17,24,31,38,45\}$, $A_4=\{4,11,18,25,32,39,46\}$, $A_5=\{5,12,19,26,33,40,47\}$,
$A_6=\{6,13,20,27,34,41,48\}$..3p

A számokat a 7-tel való osztási maradékuk szerint csoportositottuk.

Egyértelmű, hogy:

1. az A_0halmazból nem választhatunk két számot 1p

2. ha az A_i halmazból választunk elemet, akkor az A_{7-i} halmazból nem választhatunk elemet, $i \in \{1,2,3\}$.......2p

3. $card\ A_1 = 8$ és $card\ A_i = 7$ ha $i = 0$ vagy $i = \overline{2,6}$..2p

Tehát, a legtöbb választható elem száma: $8 + 1 + 7 + 7 = 23$..1p

Hivatalból………………………………...………………………………..…………………………1p