LICEUL TEORETIC “BOLYAI FARKAS”
ELMÉLETI LÍCEUM
TÎRGU MUREŞ MAROSVÁSÁRHELY
540064
STR. BOLYAI NR.3
Telefon/Fax/0365-882749, 0365-882748
E-mail:bolyai@bolyai.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY
Megyei szakasz,
Marosvásárhely, 2016. december 17.
XI. osztály

1.feladat

Legyen $S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{(k-2)\cdot 2^k}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}, \forall n \geq 3, n \in \mathbb{N}$. Számítsuk ki a $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{2^n}\cdot S_n\right)$ határértéket.

Megoldás:

$\frac{(k-2)\cdot 2^k}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)} = 2^k\cdot\left(\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}+\frac{C}{k+2}\right),\ \forall k\in N, k\geq 3$	**2p**
Kapjuk, hogy: A= -1, B = 3, C = -2	**2p**
Tehát: $S_n = \sum_{k=3}^{n}\left(-\frac{2^k}{k}+\frac{3\cdot 2^k}{k+1}-\frac{2^{k+1}}{k+2}\right)$	**1p**
Az összeg kifejtése és összevonása után kapjuk: $S_n = \frac{2^3}{4}-\frac{2^3}{3}+\frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{2^{n+1}}{n+2} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)\cdot(n+2)}-\frac{2}{3}, \quad \forall n\geq 3$	**2p**
Tehát: $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2^n}\cdot S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2}{(n+1)(n+2)}-\frac{n^2}{3\cdot 2^{n-1}}\right) = 2$	**2p**
Hivatalból	**1p**

2. feladat

Att az $A=\begin{pmatrix}\cos^2 x & \sin^2 x\\ \sin^2 x & \cos^2 x\end{pmatrix}$ mátrix, ahol $x\in\mathbb{R}$. Számítsuk ki a $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\det A^k}{\det\left(\sum_{k=1}^{n}A^k\right)}$ határértéket.

Megoldás:

Matematikai indukcióval igazolható, hogy: $A^n = \begin{pmatrix}\frac{1+cos^n 2x}{2} & \frac{1-cos^n 2x}{2}\\ \frac{1-cos^n 2x}{2} & \frac{1+cos^n 2x}{2}\end{pmatrix}, \forall n\in N^*.$	**5p**
Mivel felírható, hogy: $detA^k = (detA)^k = cos^k 2x$, ezért	**1p**

$\sum_{k=1}^{n} detA^k = cos2x + cos^2 2x + \cdots \ldots \ldots . + cos^n 2x = S_n$	**1p**
Ugyanakkor: $\det(\sum_{k=1}^{n} A^k) = \begin{pmatrix} \frac{n+S_n}{2} & \frac{n-S_n}{2} \\ \frac{n-S_n}{2} & \frac{n+S_n}{2} \end{pmatrix} => det(\sum_{k=1}^{n} A^k) = nS_n$	**1p**
Tehát: $\lim_{n\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} detA^k}{det(\sum_{k=1}^{n} A^k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.	**1p**
Hivatalból	**1p**

3. feladat

Adott a síkban *n* darab pont, amelyek között nincs három olyan, amely egy egyenesen található és nincs négy olyan, amely egy körön van. Minden ponthármas köré kört írunk. Igazoljuk, hogy a körök között található egységsugarú körök száma legfennebb $\frac{n(n-1)}{3}$.

Megoldás:

Bármely két adott pontra a síkon legfeljebb két egységsugarú kör illeszthető.	**2p**
Mivel minden közös kör középpontja rajta van a két pont által alkotott szakasz felezőmerőlegesén, ezen csak két megfelelő pont lehet.	**2p**
Így ha bármely két pontot kiválasztjuk, az összesen C_n^2 pontpár, ez azt jelenti, hogy legfeljebb $2 \cdot C_n^2$ egységsugarú kört rajzolhatunk meg.	**3p**
Ebben az esetben viszont minden kört háromszor számoltunk, tehát az egységsugarú körök száma legfeljebb $\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot C_n^2 = \frac{n \cdot (n-1)}{3}$	**2p**
Hivatalból	**1p**

4. feladat

Hét rabló a zsákmányolt aranyat névsor szerint osztja szét. Mindegyik annyi aranyat vesz el, amennyi az addig szét nem osztott aranyak száma számjegyeinek az összege. Két teljes kör után az arany elfogy. Mindenkinek ugyanannyi jutott, csak a vezér kapott többet. Hányadik a vezér a névsorban?

Megoldás:

Mivel a 9 többszörösei olyan számok, hogy számjegyeik összege éppen 9 (vagy a 9 többszörösei) ezért az aranyak száma minden lépés után a 9 többszöröse lesz.	**2p**
Tudva, hogy végül elfogy az arany, nézzük visszafelé az elvevések utáni aranyak számát.	**1p**
Tehát, ha kezdetben 135 arany volt, akkor az első elvett 9-et, maradt 126, a második 9-et, maradt 117, a harmadik 9-et, maradt 108, a negyedik is 9-et, maradt 99, az ötödik 18-at, maradt 81, a hatodik is 9-et, maradt 72, a hetedik is 9-et, maradt 63.	**4p**
Ezután kezdték elölről, majd a hetedik után éppen elfogyott. Tehát, a vezér az ötödik a névsorban.	**2p**
Hivatalból	**1p**