

ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVESENY
Megyei szakasz
Marosvásárhely, 2016. december 17.
XI. osztály

1.feladat

Legyen $S_n = \sum_{k=3}^n \frac{(k-2) \cdot 2^k}{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)}$, $\forall n \geq 3, n \in \mathbb{N}$. Számítsuk ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{2^n} \cdot S_n \right)$ határértéket.

2. feladat

Adott az $A = \begin{pmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{pmatrix}$ mátrix, ahol $x \in \mathbb{R}$. Számítsuk ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \det A^k}{\det \left(\sum_{k=1}^n A^k \right)}$ határértéket.

3. feladat

Adott a síkban n darab pont, amelyek között nincs három olyan, amely egy egyenesen található és nincs négy olyan, amely egy körön van. Minden ponthármas köré kört írunk. Igazoljuk, hogy a körök között található egység sugarú körök száma legfeljebb $\frac{n(n-1)}{3}$.

4. feladat

Hét rabló a zsákmányolt aranyat névsor szerint osztja szét. Mindegyik annyi aranyat vesz el, amennyi az addig szét nem osztott aranyak száma számjegyeinek az összege. Két teljes kör után az arany elfogy. Mindenkinek ugyanannyi jutott, csak a vezér kapott többet. Hányadik a vezér a névsorban?

Megjegyzések: Munkaidő 3 óra.

Minden feladat kötelező.

Mindegyik feladat helyes megoldása 10 pontot ér, melyből 1 pont jár hivatalból.