LICEUL TEORETIC "BOLYAI FARKAS"
ELMÉLETI LÍCEUM
TÎRGU MUREŞ MAROSVÁSÁRHELY
540064
STR. BOLYAI NR.3
Telefon/Fax/0365-882749, 0365-882748
E-mail:bolyai@bolyai.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY
Megyei szakasz
Marosvásárhely, 2016. december 17.
XII. osztály

1.feladat

Adott az $E=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, bármely $t\in\mathbf{R}$ esetén tekintsük az

$f:E\to E,\ f_t(x,y)=\left(x+ty+\frac{t^2}{2},y+t\right),\forall(x,y)\in E$ függvényt

a) Igazoljuk, hogy $f_t o f_u = f_{t+u}$, $\forall t,u\in\mathbf{R}$ esetén, ahol "o" a függvények összetevése.

b) Igazoljuk, hogy a $G=\{f_t \mid t\in\boldsymbol{R}\}$ halmaz a függvények összetevésével kommutatív csoportot alkot.

Megoldás:

$f_t(x,y) o f_u(x,y) = f_t\left(x+uy+\frac{u^2}{2},y+u\right)=$ $\left(x+uy+\frac{u^2}{2}+t(y+u)+\frac{t^2}{2},y+t+u\right)=\left(x+y(t+u)+\frac{(t+u)^2}{2},y+t+u\right)=f_{t+u}(x,y)$	**3p**
$f_t o f_u = f_u o f_t, \forall t,u\in\mathbf{R}$	**1p**
$(f_t o f_u) o f_v = f_u o(f_t o f_v), \forall t,u,v\in\mathbf{R}$	**1p**
$\exists e\in\mathbf{R}: f_t o f_e = f_e o f_t = f_t, \forall t\in\mathbf{R}$	**2p**
$\forall t\in\mathbf{R}, \exists t'\in\mathbf{R}: f_t o f_{t'} = f_{t'} o f_t = f_e, \forall t\in\mathbf{R}$	**2p**
Hivatalból	**1p**

2.feladat

a) Határozzuk meg az $h:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbf{R}$, $h(x)=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$ függvény primitív függvényeinek a halmazát.

b) Határozzuk meg az $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbf{R}$ primitíválható függvényt, tudva, hogy

$f(x)\cdot F\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x, \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ és $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$, ahol F egy primitív függvénye az f függvénynek.

Megoldás:

Legyen $A=\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ és $B=\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. $A+B=\int 1dx\Rightarrow A+B=x+\mathscr{C}$, $B-A=\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx\Rightarrow B-A=\ln\left(\sin x+\cos x\right)+\mathscr{C}$, ahonnan $A=\frac{1}{2}\left(x-\ln\left(\sin x+\cos x\right)\right)+\mathscr{C}$,tehát $H(x)=\frac{1}{2}\left(x-\ln\left(\sin x+\cos x\right)\right)+\mathscr{C}$ ahol $\mathscr{C}=\left\{\varphi:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbf{R}\right\}$, φ egy állandó függvény.	**3p**
Az $f(x)\cdot F\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x, \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$(1) egyenlőségben az $x\to\frac{\pi}{2}-x$ helyettesítést alkalmazva kapjuk, hogy $F(x)\cdot f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x, \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ (2),	**1p**
Kivonva egymásból az (1) és (2) azonosságokat következik az $f(x)\cdot F\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-F(x)\cdot f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x-\sin x, \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, ahonnan $\left(F(x)\cdot F\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\cos x-\sin x, \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, tehát $F(x)\cdot F\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x+\cos x+c, \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.	**2p**
Az (1) és (2) azonosságokat összeszorozva kapjuk, hogy $f(x)\cdot F\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot F(x)\cdot f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\cos x, \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow$ $f^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot F^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$ felhasználva az $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$ feltételt kapjuk, hogy $F^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$, tehát $F(x)\cdot F\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x+\cos x+c, \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow c=0$.	**1p**
$F(x)\cdot F\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x+\cos x, \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ és $f(x)\cdot F\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x, \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$azonosságokból kapjuk, hogy	**1p**

$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\Rightarrow\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}$, ahonnan $\ln\left(F(x)\right)=\frac{1}{2}\left(x+\ln\left(\sin x+\cos x\right)\right)+\mathscr{C}$.	
$F(x)=k\cdot e^{\frac{x}{2}}\cdot\sqrt{\sin x+\cos x}\Rightarrow f(x)=F'(x)=k\cdot e^{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x+\cos x}}$, felhasználva az $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$ feltételt kapjuk, hogy $k=e^{-\frac{\pi}{8}}$ és $f(x)=k\cdot e^{\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}}\cdot\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x+\cos x}}$.	**1p**
Hivatalból	**1p**

3.feladat

Adott az $ABCD$ négyzet, $D\in(AC)$, $m(CBE\sphericalangle)=30^0$ és F az E pont szimmetrikusa a C pontra nézve, Igazoljuk, hogy a BDF háromszög egyenlő oldalú.

Megoldás:

Rajz	**1p**
Alkalmazzuk a szinusztételt a BEC háromszögben kapjuk, hogy $\frac{BE}{\sin 45^0}=\frac{CE}{\sin 30^0}=\frac{a}{\sin 105^0}$, ahonnan $CE=\frac{a\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{2}\Rightarrow CF=\frac{a\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{2}$.	**3p**
Alkalmazva a koszinusztételt a BCF háromszögben kapjuk, hogy $BF^2=BC^2+CF^2-2BC\cdot CF$, ahonnan $BF^2=a^2+a^2\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{4}+2a^2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos 135^0$.	**2p**
Elvégezve a számításokat kapjuk, hogy $BF^2=2a^2$.	**1p**
Hasonlóan kapjuk, hogy $DF=a\sqrt{2}$.	**1p**
Tehát a BDF háromszögben $DB=BF=DF=a\sqrt{2}$.	**1p**
Hivatalból	**1p**

4.feladat

Egy kör középpontjának mindkét koordinátája irracionális szám. Mutassuk ki, hogy nincs a körön három olyan pont, melyek mindegyik koordinátája racionális szám.

Megoldás:

Legyen $A(a,b), B(c,d), C(e,f),\ a,b,c,d,e,\ f\in \mathbf{Q}$ a kör három olyan pontja, melyek mindegyik koordinátája racionális szám. Felírjuk az $AB:\begin{vmatrix} x & y & 1\\ a & b & 1\\ c & d & 1\end{vmatrix}=0$, illetve az $AC:\begin{vmatrix} x & y & 1\\ a & b & 1\\ e & f & 1\end{vmatrix}=0$ egyenesek egyenletét. Tehát $AB:(b-d)x-(a-c)y+ad-bc=0$ és $AC:(b-f)x-(a-e)y+af-be=0$.	**2p**
Legyen d_1 és d_2 az $[AB]$ illetve $[AC]$ szakaszok felezőmerőlegesei. $d_1: y-\frac{b+d}{2}=\frac{c-a}{b-d}\left(x-\frac{a+c}{2}\right)$ és $d_2: y-\frac{b+f}{2}=\frac{e-a}{b-f}\left(x-\frac{a+e}{2}\right)$.	**2p**
Bevezetve a $p=\frac{b+d}{2}, q=\frac{c-a}{b-d}, r=\frac{a+c}{2},\ k=\frac{b+f}{2}, m=\frac{e-a}{b-f}, n=\frac{a+e}{2}$ jelöléseket kapjuk, hogy $d_1: y-p=q(x-r)$ és $d_2: y-k=m(x-n)$. ahol $p,q,r,k,m,n\in \mathbf{Q}$. A d_1 és d_2 egyenesek metszéspontja meghatározza az A,B és C pontok köré írt kör középpontját. Jelölje M az A,B és C pontok köré írt kör középpontját. Megoldva a d_1 és d_2 egyenesek egyenleteiből alkotott egyenletrendszert kapjuk, hogy $M\left(\frac{mn-qr+p-k}{m-q},\frac{mq(n-r)+mp-qk}{m-q}\right)$, ahonnan $x_M=\frac{mn-qr+p-k}{m-q}\in \mathbf{Q}$ *és* $y_M=\frac{mq(n-r)+mp-qk}{m-q}\in \mathbf{Q}$, tehát ellentmondás, mivel a kör középpontjának mindkét koordinátája irracionális szám.	**3p**
$AB\cap AC=\{A\},\Rightarrow d_1\cap d_2\neq\varnothing\Rightarrow m-q\neq 0$	**1p**
A $b=d$ illetve a $b=f$ esetek vizsgálata	**1p**
Hivatalból	**1p**