JAVITÓKULCS - V. OSZTÁLY

1. Feladat
Adottak az a, b, c nullától különböző számjegyek a tízes számrendszerben. Jelöljük S-el az összes különböző számjegyekből álló, kétjegyű számok összegét, amelyek az a, b és c számjegyekkel képezhetők.
a) Határozzuk meg az S összegnek 11-el való osztási hányadosát és maradékát;
b) Ha S = 440, határozzuk meg a legnagyobb $\overline{abc}$ alakú 5-tel osztható természetes számot.

Megoldás:
a)

$$S=\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{bc}+\overline{ba}+\overline{ca}+\overline{cb}\text{..........................}2p$$

$$S=10a+b+10a+c+10b+c+10b+a+10c+a+10c+b\text{..................}1p$$

$$S=22a+22b+22c \quad S=22\cdot(a+b+c)\text{...........................}1p$$

Az S összegnek 11-gyel való osztási hányadosa $2(a+b+c)$
es maradéka 0...........2p
b)

$$S=22\cdot(a+b+c)$$

$$440=22\cdot(a+b+c)/22\text{.....................}1p$$

$$a+b+c=20\text{.......................}1p$$

A legnagyobb 5-tel osztható szám 965 ....**1p**

2. Feladat
Minden kétjegyű pozitív egész számban összeszoroztuk a számjegyeket. Ha a kapott szorzat egyjegyű, akkor megállunk, ha nem, akkor újra összeszorozzuk a jegyeket mindaddig, amíg egyjegyű számhoz nem jutunk. (Pl.: 97 → 9 · 7 = 63 → 6 · 3 = 18 → 1 · 8 = 8)
Hány olyan kétjegyű szám van, amelynél az eredményül kapott egyjegyű szám a nulla?

Megoldás:
Az első szorzás után azonnal nullát kapunk minden olyan kétjegyű szám esetén, amelynek egyik számjegye 0. Ezek a számok: 10, 20, 30, . . ., 90, összesen 9 db…………………………..**2p**
A második szorzás után akkor kapunk nullát, ha az első szorzás eredménye az előbb felsorolt 9 db szám valamelyike. Ezek a számok: 25, 52, 45, 54, 65, 56, 85, 58, összesen 8 db…………….**2p**
A harmadik szorzás után akkor kapunk nullát, ha a második szorzás eredménye az előbb felsorolt 8 db szám valamelyike. Közülük csak a 25, 45, 54, 56 bontható fel két egyjegyű szám szorzatára. Ezek a számok: 55, 59, 95, 69, 96, 78, 87, összesen 7 db. …………………………………...**2p**
A negyedik szorzás eredménye akkor lehet nulla, ha a harmadik szorzás után az előbb felsorolt 7 db szám valamelyikét kapjuk. Mivel ezen számok egyike sem bontható fel 2 db egyjegyű szám szorzatára, ezért más számok esetén az eljárásban nem kaphatunk nullát. ……………………...**2p**
Összegezve: összesen tehát 9 + 8 + 7 = **24 db olyan kétjegyű szám van, amelyben az eljárás végén nullát kapunk eredményül.** ……………………….**1p**

3. Feladat

Megoldás:

$$99 = 8 + 27 + 64 = 2^3 + 3^3 + 4^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2p$$

$$99^{2017} = 99 \cdot 99^{2016} = (8 + 27 + 64) \cdot 99^{2016} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2p$$
$$8 \cdot 99^{2016} + 27 \cdot 99^{2016} + 64 \cdot 99^{2016} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1p$$
$$2^3 \cdot 99^{672 \cdot 3} + 3^3 \cdot 99^{672 \cdot 3} + 4^3 \cdot 99^{672 \cdot 3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2p$$
$$2^3 \cdot \left(99^{672}\right)^3 + 3^3 \cdot \left(99^{672}\right)^3 + 4^3 \cdot \left(99^{672}\right)^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1p$$
$$\left(2 \cdot 99^{672}\right)^3 + \left(3 \cdot 99^{672}\right)^3 + \left(4 \cdot 99^{672}\right)^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1p$$

4. Feladat

Megoldás:

$$a = 4 - \left\{125 - \left[100 - \left(3^4 : 3^4 + 3\right) \cdot 5 + 8 \cdot 5\right] - 5\right\} \cdot 125 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1p$$
$$a = 4 - \left[125 - \left(100 - 20 + 40\right) - 5\right] \cdot 125 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1p$$
$$a = 4 - \left(125 - 120 - 5\right) \cdot 125 \quad a = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1p$$

$$b = 2^{16} + 3^9 : 3^8 \cdot 3 - 2^{16} + 2^{10} : \left(2^5 \cdot 2^2\right) - 2^2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1p$$
$$b = 2^{16} + 3^2 - 2^{16} + 2^3 - 12 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1p$$
$$b = 9 + 8 - 12 \; b = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1p$$

$$\left(54 - 45\right) \cdot 55 - 50 = \overline{44x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1p$$
$$9 \cdot 55 - 50 = 440 + x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1p$$
$$495 - 50 = 440 + x$$
$$x = 445 - 440 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1p$$