JAVÍTÓKULCS – VI. OSZTÁLY

1. Feladat

Egy 10m hosszú előre haladó gyereksor legvégéről a kísérőjük a sor elejére ment, majd amikor odaért, visszafordult és ismét a sor végére ment. A kísérő háromszor olyan gyorsan haladt, mint a gyerekek. Mekkora utat tettek meg a gyerekek, mire a kísérő ismét a sor végére ért?

Megoldás:

A sor elején levő gyerek x métert haladt előre addig, amíg a kisérő a sor elejére került.
Így a kisérő x+10 métert tett meg. Mivel a kisérő 3-szor gyorsabban haladt a gyerekeknél kapjuk, hogy x+10 = 3x, ahonnan x=5m. Tehát a sor 5m-t haladt előre.
Amikor a kisérő visszafele fordult, a sor és a kisérő összesen 10 métert(a sor hosszát) tett meg.
A kisérő 7,5m-t, a sor 2,5m-t haladt. A sor tehát összesen 5m+2,5m=7,5m-t tett meg.

2. Feladat

Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ és adottak a következő számok :

$a = 2^{2n+3} \cdot 9^{n+1} + 3 \cdot 4^{n+1} \cdot 3^{2n+2} - 173 \cdot 2^{2n} \cdot 3^{2n}$ és

$b = 5^{2n+1} \cdot 27^{n+2} \cdot 8 + 25^{n+1} \cdot 3^{3n+2} \cdot 10 - 31403 \cdot 9^{n} \cdot 5^{2n} \cdot 3^{n}$

a) Mutassuk ki, hogy a osztható 21-gyel;

b) Határozzuk meg a $c = (a+b) : 3^{2n}$ szám utolsó számjegyét.

Megoldás:

a)

$a = 2^{2n} \cdot 2^{3} \cdot 3^{2n} \cdot 9 + 3 \cdot 2^{2n} \cdot 4 \cdot 3^{2n} \cdot 3^{2} - 173 \cdot 2^{2n} \cdot 3^{2n}$

$a = 6^{2n} \cdot 8 \cdot 9 + 6^{2n} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 9 - 173 \cdot 6^{2n}$..1$p$

$a = 6^{2n} \cdot (72 + 108 - 173)$..1$p$

$a = 6^{2n} \cdot 7$

$a = 6^{2n-1} \cdot 6 \cdot 7$

$a = 6^{2n-1} \cdot 2 \cdot 21 \Rightarrow a \,\vdots\, 21$..1$p$

b)

$b = 5^{2n} \cdot 5 \cdot 3^{3n} \cdot 27^{2} \cdot 8 + 5^{2n} \cdot 25 \cdot 3^{3n} \cdot 9 \cdot 10 - 31403 \cdot 3^{2n} \cdot 5^{2n} \cdot 3^{n}$

$b = 5^{2n} \cdot 3^{3n} \cdot 40 \cdot 729 + 5^{2n} \cdot 3^{3n} \cdot 2250 - 31403 \cdot 3^{3n} \cdot 5^{2n}$...1$p$

$b = 5^{2n} \cdot 3^{3n} \cdot (29160 + 2250 - 31403)$

$b = 5^{2n} \cdot 3^{3n} \cdot 7$..1$p$

$c = \left(6^{2n} \cdot 7 + 3^{3n} \cdot 5^{2n} \cdot 7\right) : 3^{2n}$

$c = 7 \cdot 3^{2n} \cdot \left(2^{2n} + 3^{n} \cdot 5^{2n}\right) : 3^{2n}$

$c = 7 \cdot \left(2^{2n} + 3^{n} \cdot 5^{2n}\right)$..1$p$

$u\left(5^{2n}\right) = 5 \Rightarrow u\left(3^{n} \cdot 5^{2n}\right) = 5$...1$p$

Ha $n = 2k, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u\left(2^{2n}\right) = 6 \Rightarrow u\left(c_n\right) = u\left(7 \cdot (6+5)\right) = 7$ …………..1p

Ha $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u\left(2^{2n}\right) = 4 \Rightarrow u\left(c_n\right) = u\left(7 \cdot (4+5)\right) = 3$ ……….1p

3. Feladat

Egy zacskóban 9 golyó van, 1-től 9-ig számozva. Véletlenszerűen kihúzunk 7 golyót. A kihúzott 7 golyón lévő számjegyekkel alkotható-e:

a) legalább egy háromjegyű 3-mal osztható szám?

b) legalább három darab, háromjegyű, 3-mal osztható szám?

Megoldás:

a) Az 1, 4 és7 számjegyek 3-mal való osztási maradéka 1.

A 2, 5 és 8 számjegyek 3-mal való osztási maradéka 2.

A 3, 6 és 9 számjegyek 3-mal való osztási maradéka 0.

Akárhogyan választok ki a 9 golyó közül 7-et a rajtuk lévő számjegyek között biztosan lesz három olyan amelyiknek 3-mal való osztási maradéka ugyanannyi. Ebben az esetben e három számjegyből alkotott háromjegyű szám biztosan osztható 3-mal……………………………………6p

b) Az a) alpont alapján biztosan alkotható legalább egy háromjegyű szám, mely osztható 3-mal. Legyen ez a szám $\overline{abc}$, mivel $\overline{abc}\,\vdots\,3 \Rightarrow (a+b+c)\,\vdots\,3 \Rightarrow \overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}\,\vdots\,3$

Tehát a kihúzott 7 számjeggyel alkothatunk hat olyan háromjegyű számot, mely osztható 3-mal.

3p

4. Feladat

A $BOC\sphericalangle$ és $BOD\sphericalangle$ a pótszöge illetve a kiegészítő szöge az $AOB\sphericalangle$ hegyesszögnek. Legyen $[OE$ az $[OB$ ellentétes félegyenese. Ha $[OM$ a $BOC\sphericalangle$ szögfelezője és $[ON$ az $AOE\sphericalangle$ szögfelezője, számítsuk ki:

a) az $MON\sphericalangle$ szög mértékét

b) az $AOB\sphericalangle$ szög mértékét, ha $m(BOC\sphericalangle)=\dfrac{1}{10}m(BOD\sphericalangle)$.

Megoldás:

a)

Legyen $m(AOB\sphericalangle)=x \Rightarrow m(BOC\sphericalangle)=90-x$ és $m(BOD\sphericalangle)=180-x$

$m(EOD\sphericalangle)=m(AOB\sphericalangle)=x \Rightarrow m(AOE\sphericalangle)=180-x$ ……………………………………..2p

$m(MON\sphericalangle)=m(MOB\sphericalangle)+m(BOA\sphericalangle)+m(AON\sphericalangle)\Rightarrow$

$$m(MON\sphericalangle)=\frac{m(BOC\sphericalangle)}{2}+m(BOA\sphericalangle)+\frac{m(AOE\sphericalangle)}{2}$$

$$m(MON\sphericalangle)=\frac{90-x}{2}+x+\frac{180-x}{2}$$

$$m(MON\sphericalangle)=\frac{90-x}{2}+\frac{2x}{2}+\frac{180-x}{2}$$

$$m(MON\sphericalangle)=\frac{270}{2}=135^0$$

4p

b)

$m(BOC\sphericalangle)=\dfrac{1}{10}m(BOD\sphericalangle)\Rightarrow$

$90-x=\dfrac{1}{10}(180-x)\Rightarrow$ 1p

$900-10x=180-x\Rightarrow$

$9x=720\Rightarrow x=80^0$...2p