ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY
Megyei szakasz,
Marosvásárhely, 2016. december 17.
8. osztály

1. Legyen $x, y \in R$ úgy, hogy $3x+2y-1=0$ és $x \in [-1;3]$. Számítsd ki az S értékét, ahol

$$S=\sqrt{x^2+y^2+2x-4y+5}+\sqrt{x^2+y^2-6x+8y+25}.$$

Megoldás:

Csoportosítás után kapjuk, hogy $S=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}$..................**3p**

Kifejezve az y-t kapjuk, hogy $y=\frac{1-3x}{2}$..**1p**

Behelyetesítve az y-t S-be kapjuk, hogy

$S=\sqrt{(x+1)^2+\frac{9}{4}\cdot(x+1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+\frac{9}{4}\cdot(3-x)^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot|x+1|+\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot|3-x|$. **4p**

Felhasználva, hogy $x\in[-1{,}3]$ következik, hogy $S=\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot(x+1)+\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot(3-x)=2\sqrt{13}$..........**1p**

2. Igazoljuk, hogy a következő, $4012=2\cdot2006$ tagú összeg értéke $\frac{5}{6}$ -nál nagyobb, de $\frac{3}{2}$ -nél kisebb:

$$\left(\frac{1}{2007}+\frac{1}{2008}+\frac{1}{2009}+\ldots+\frac{1}{4012}\right)+\left(\frac{1}{4013}+\frac{1}{4014}+\ldots+\frac{1}{6017}+\frac{1}{6018}\right).$$

Megoldás:

Az összeg első 2006 tagját csökkenthetjük, ha mindegyik helyett a legkisebbet, vagyis $\frac{1}{4012}$ -t írunk. Ugyanígy a második 2006 tag helyett is a legkisebbet, azaz $\frac{1}{6018}$ -at írva még nkább csökken az összeg. Vagyis

$$\left(\frac{1}{2007}+\frac{1}{2008}+\ldots+\frac{1}{4012}\right)+\left(\frac{1}{4013}+\ldots+\frac{1}{6017}+\frac{1}{6018}\right)>2006\cdot\frac{1}{4012}+2006\cdot\frac{1}{6018}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

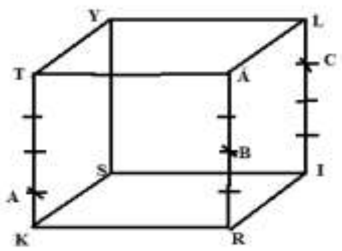
4.5 pont

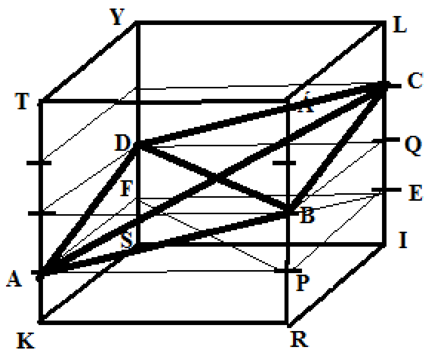
Hasonló módon, az első 2006 tag mindegyike helyett nagyobbat írva és a következő 2006 tag helyett is a nagyobbat írva kapjuk, hogy:

$$\left(\frac{1}{2007}+\frac{1}{2008}+\ldots+\frac{1}{4012}\right)+\left(\frac{1}{4013}+\ldots+\frac{1}{6017}+\frac{1}{6018}\right)<2006\cdot\frac{1}{2006}+2006\cdot\frac{1}{4012}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

4.5 pont

3. Az ábrán látható *a* élű KRISTÁLY kocka három élét 4-4 kongruens részre osztjuk. A kockát elmetsszük az A, B és C osztópontokon áthaladó síkkal. Határozzuk meg a kapott metszet kerületét és területét.





Megoldás:

$(ABC)\cap(KSY)=DA, (ABC)\cap(RIL)=BC \Rightarrow AD \parallel BC$ (1).

Hasonlóan igazolható hogy $CD \parallel BA$ (2). (1) és (2) $\Rightarrow$ ABCD paralelogramma (3)…… ……..**3p**

$APB_{\Delta} \equiv BQC_{\Delta} (B.B) \Rightarrow AB = BC$ (4). (3) és (4) $\Rightarrow$ ABCD rombusz…………………… ………..**1p**

ABP$_{\Delta}$-ben alkalmazva Pitagoras tételét $\Rightarrow$ $AB=\dfrac{a\sqrt{17}}{4} \Rightarrow K_{ABCD}=4AB=a\sqrt{17}cm$ ……… ………**2p**

ACE$_{\Delta}$-ben alkalmazva Pitagoras tételét $\Rightarrow$ $AC=\dfrac{3a}{2}$ …………………………………… …… ….**1p**

$DB = SR = a\sqrt{2}$ ………………………………………………………………………… ……..**1p**

Tehát $T_{ABCD}=\dfrac{AC\cdot BD}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3a}{2}\cdot a\sqrt{2}=\dfrac{3a^2\sqrt{2}}{4}cm^2$ …………………………………………… .**1p**

4. Egyszer néhány fiú horgászni ment a közeli tóhoz. Egyikük 6 halat fogott, a többiek fejenként 13-at. Egy másik alkalommal egy másik fiúcsapat ment horgászni, ezúttal egyikük 5 halat fogott, a többiek fejenként 10-et. Tudjuk még, hogy mindkét alkalommal összesen ugyanannyi halat fogtak, méghozzá 100-nál többet, de 200-nál nem többet. Hányan mentek horgászni az első alkalommal, és hányan a második alkalommal?

Megoldás:

Ha első alkalommal k + 1 fiú ment horgászni, akkor 13k + 6 darab halat fogtak. …………………… …**2p**
Ha a második alkalommal n + 1-en mentek, akkor 10n + 5-öt. …………………………………… ……**2p**
Tudjuk, hogy ez a két szám egyenlő, és 100-nál nagyobb, de legfeljebb 200. Ebben a tartományban a következő 13-mal osztva 6 maradékot adó számok vannak:

110; 123; 136; 149; 162; 175; 188:

A második alkalom miatt tudjuk, hogy a fogott halak száma 5-re végződik, így egyedül a 175 lehetséges.
Ebből következően első alkalommal 14-en, második alkalommal pedig 18-an mentek horgászni………**5p**