LICEUL TEORETIC "BOLYAI FARKAS"
ELMÉLETI LÍCEUM
TÎRGU MUREŞ MAROSVÁSÁRHELY
540064
STR. BOLYAI NR.3
Telefon/Fax/0365-882749, 0365-882748
E-mail:bolyai@bolyai.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY
Megyei szakasz,
Marosvásárhely, 2016. december 17.
IX. osztály

1. feladat

Oldd meg a következő egyenletet:

$$\left[\frac{x-1}{6}\right]+\left[\frac{x+1}{6}\right]+\left[\frac{x+3}{6}\right]+\left[\frac{2x+1}{11}\right]=\frac{x-1}{2}\ .$$

Megoldás:

Az egyenlet így írható:

$\left[\frac{x-1}{6}\right]+\left[\frac{x-1}{6}+\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{x-1}{6}+\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{2x+1}{11}\right]=\frac{x-1}{2}$ …………………………………………………...……. 2p

$\Leftrightarrow\ \left[3\cdot\frac{x-1}{6}\right]+\left[\frac{2x+1}{11}\right]=\frac{x-1}{2}\ <=>$ ……………………………………………………..…..2p

$\left[\frac{2x+1}{11}\right]=\frac{x-1}{2}-\left[\frac{x-1}{2}\right]\ <=>\ \left[\frac{2x+1}{11}\right]=\left\{\frac{x-1}{2}\right\}\in Z$ ……………………………………...………..2p

$=>\ \left\{\frac{x-1}{2}\right\}=0\ =>\ \frac{x-1}{2}=k\in Z\ =>\ x=2k+1$ ……………………………..……………..2p

Az egyenlet így alakul: $\left[\frac{4k+3}{11}\right]=0\ <=>\ 0\le\frac{4k+3}{11}<1\ <=>\ -\frac{3}{4}\le k<2,\ k\epsilon Z\ =>\ k\in\{0,1\}$

$=>\ x\epsilon\{1,\ 3\}$.……………………………………………………………………………………1p

Hivatalból………………………………………………………………………………………1p

2. feladat

a) Igazold, hogy $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$, $\forall a,b,c\in R$ és $\forall x,y,z>0$.

b) Igazold, hogy $\frac{a^2}{b^2+2bc}+\frac{b^2}{c^2+2ca}+\frac{c^2}{a^2+2ab}\ge 1,\ \forall a,b,c>0$.

Megoldás:

a) A C.B.S. egyenlőtlenséget alkalmazva:

$\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right)\cdot(x+y+z)\ge\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}+\frac{b}{\sqrt{y}}\cdot\sqrt{y}+\frac{c}{\sqrt{z}}\cdot\sqrt{z}\right)^2=(a+b+c)^2$……………………..……5p

Az a) alpont alapján: $\frac{a^2}{b^2+2bc}+\frac{b^2}{c^2+2ca}+\frac{c^2}{a^2+2ab}\ge\frac{(a+b+c)^2}{b^2+2bc+c^2+2ca+a^2+2ab}=1$.……………………..………4p

Hivatalból…………………………………………………………………………….…………1p

3. feladat

Egy 80 tagú számsorozatról tudjuk, hogy bármely közbülső tagja egyenlő szomszédainak szorzatával. Továbbá az első 40 tag szorzata is 8, valamint összes tagjának szorzata is 8. Határozd meg a sororzat első és második tagját.

Megoldás:

A sorozat elemeinek szorzata 8 => a 0 nem tagja a sorozatnak……………………..………………1p

Legyen az első két tag a és b, akkor felírhatók a sorozat elemei:

$a, b, \frac{b}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{a}{b}, a, b, \ldots$……….. ……………………………………………………..…………3p

Észrevehető, hogy a sorozat első hat eleme periodikusan ismétlődik.

Egy-egy periódusban a tagok szorzata 1 => az első 40 tag szorzata:

$a \cdot b \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{b^2}{a} = 8$, ……………………………………………………………..…………….2p

illetva az első 80 elem szorzata: $a \cdot b = 8$ => ……………………………...…………..2p

$b^3 = 64$ => $b = 4$ => $a = 2$ ..………….. ………………………………………………….………..1p

Hivatalból………………………………………………………………………………………1p

4. feladat

Az általános hegyesszögű ABC háromszög magasságpontja *H*, súlypontja *G*. Legyen *K,L, M* és *P* az *ABH, BCH, CAH,* illetve *KLM* háromszög súlypontja. Bízonyítsd be, hogy *H, P, G* kollineáris pontok és $HP = 2PG$.

Megoldás:

A helyzetvektorok kezdőpontjának az *ABC* háromszög köré írt kör *O* középpontját vesszük és felhasználjuk Sylvester képletét, illetve a súlypont helyzetvektorát:

Ábra………………………………………………………………………………………………..1p

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$………………………………………………………………...………..1p

$\overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OH}}{3} = \frac{2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$;… ………………………..………………………………….…..1p

$\overrightarrow{OL} = \frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OH}}{3} = \frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}}{3}$;….. ……………………………………………………………1p

$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OH}}{3} = \frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}}{3}$;……………. ……………………………………………...….1p

$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}}{3} = \frac{5\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})}{9}$; ………………………………….……………………...1p

=> $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OG} = \frac{2\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})}{3}$;… …………………………………………….……..1p

$\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OG} = \frac{2\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})}{9}$ => $\overrightarrow{GH} = 3 \cdot \overrightarrow{GP}$ =>……………………………………….1p

H, P, G kollineáris pontok és $HP = 2 \cdot PG$ ...……………………………………..…..1p

Hivatalból………………………………………………………………………………………1p