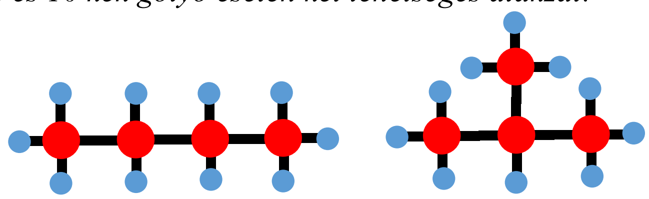
MEGOLDÁSOK
Pontszerző Matematikaverseny 2016/2017 tanév
1. forduló

1. feladat:
Péter egy építőjátékot kapott ajándékba. A játékban piros és kék színű golyók vannak, amelyekhez mágneses pálcikákat rögzítettek.

A golyókból alakzatokat lehet építeni a mágneses pálcikákkal összeillesztve őket.
Van azonban néhány szabály, amit az építésnél be kell tartani.

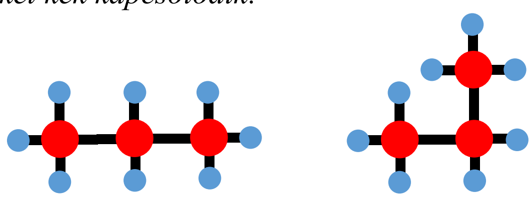
1. **A piros golyók négy másik golyóhoz csatlakozhatnak, amelyek lehetnek pirosak vagy kékek.**
2. **A kék golyók csak egy másik golyóhoz csatlakozhatnak, amely csak piros lehet.**
3. **A szabályok betartásával lehet tetszőleges hosszúságú láncokat építeni, de a láncban egyetlen pálcika sem maradhat szabadon, tehát golyónak kell hozzá csatlakoznia.**

   Például: 4 piros és 10 kék golyó esetén két lehetséges alakzat:



4. **Két alakzatot nem tekintünk különbözőnek, ha az alakzatokban szereplő piros golyók párba állíthatók úgy, hogy a szomszédaik azonosak a sorrendtől eltekintve.**

   Pl.: Az alábbi két szerkezet nem különbözik, mert mindkettőben két olyan piros golyó van, amelyhez 1 piros és három kék kapcsolódik, valamint 1 olyan piros golyó van, amelyhez két piros és két kék kapcsolódik:



A szerkezetekhez szükséges golyók számát meg tudjuk adni a következő **összeg formában**:

P4K10

Ez azt jelenti, hogy 4 piros és 10 kék golyó szükséges a megépítésükhöz.

Feladatok:

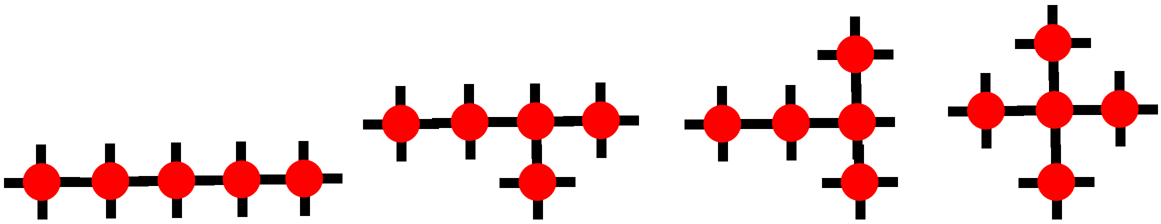
a) Rajzold le a négy szabálynak eleget tevő összes lehetséges szerkezetet, ha az építéshez 5 piros és 12 kék golyót használhatsz!

b) Add meg az a) feladatban lerajzolt szerkezetek összeg formáját!

c) Mennyi kék golyó szükséges a négy szabály betartásával, ha összesen 7 piros golyót használhatsz?

Megoldás:

a) Három lehetséges megoldás van, ami eleget tesz a szabályoknak. Az üres pálcikák végén vannak a kék golyók. A pontozásnál mindenképpen érdemes azt is értékelni, hogy nem rajzolt olyan szerkezetet, ami megegyezik a korábbiak valamelyikével.



Minden jó megoldás 2 pont, ha ugyanaz a megoldás többször is szerepel, akkor az az eset 1pont. Maximum 6 pont.

b) P5K12 *2 pont*
c) 16 kék golyó szükséges. *2 pont*

Összesen: 10 pont

2. feladat: A 2016 olyan négyjegyű szám, melynek utolsó számjegye egyenlő az első három számjegye összegének a kétszeresével. Hány ilyen négyjegyű szám van? Válaszodat indokold!

Megoldás:

Mivel az utolsó számjegy az első három összegének a kétszerese, így az csak páros szám lehet, de nem lehet nulla. *2 pont*
Ha az utolsó számjegy 2, akkor egyetlen ilyen szám van az 1002. *1 pont*
Ha az utolsó számjegy 4, akkor a megfelelő számok: 1104; 1014; 2004. *2 pont*
Ha az utolsó számjegy 6, akkor a megfelelő számok: 1116; 1206; 1026, 2106; 2016; 3006. *2 pont*
Ha az utolsó számjegy 8, akkor a megfelelő számok: 1128; 1218; 2118, 2028; 2208; 3108; 3018; 1038; 1308; 4008. *3 pont*
Tehát összesen 20 ilyen tulajdonságú szám van. *1 pont*
Összesen: 14 pont

3. feladat: Ha 1-től kezdve sorba összeadjuk a pozitív egész számokat, akkor az 1; 3; 6; 10; 15; 21; 28; … számsorozatot kapjuk. Ezeket a számokat az ókori görögök háromszög-számoknak nevezték.

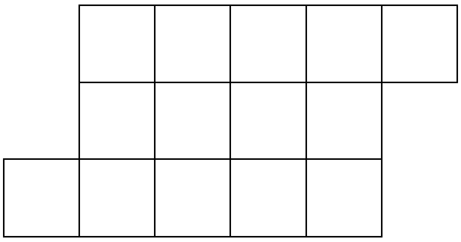
a) Hányadik háromszögszám a 2016? Válaszodat számítással indokold!

b) Bontsd fel az 56-ot különböző háromszögszámok összegére az összes lehetséges módon!

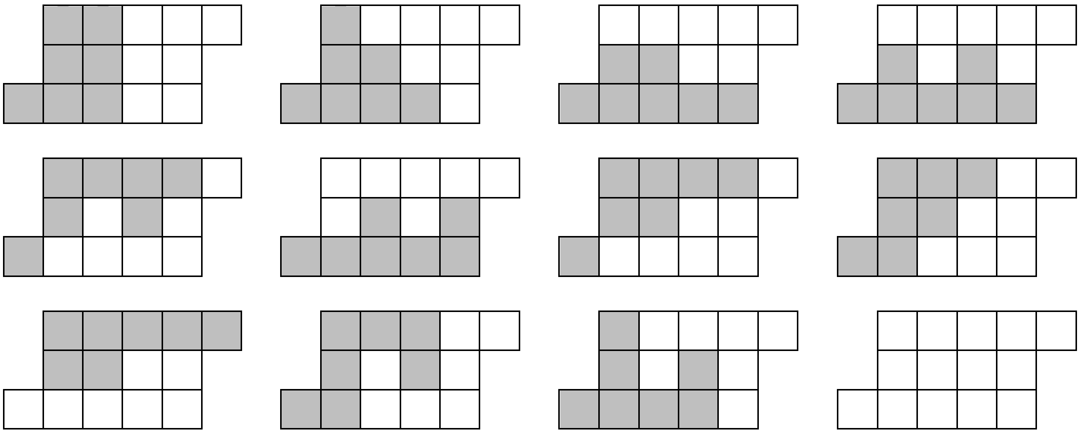
Megoldás:

a) Próbálkozzunk az első néhány (10, 20, 40, 50, 60, 70) egymás utáni természetes számok összegével. Ezeket a Gauss módszerrel számíthatjuk. Pl.: 1+2+3+…+50=(1+50)·50:2=1275, ami kevés. *3 pont*
Az első 60 összege: (1+60)·60:2=1830, kevés. Az első 70 összege: (1+70)·70:2=2485, ez már sok. *2 pont*
További néhány próba után eljutunk a megoldáshoz, ami az első 63 természetes szám összegeként adódik. (1+63)·63:2=2016. *2 pont*
Tehát a 63. háromszögszám a 2016. *2 pont*
b) A háromszögszámok 56-ig: 1; 3; 6; 10; 15; 21; 28; 36; 45; 55.
A fenti számokkal az 56 előállítása: 45+10+1; 36+10+6+3+1; 28+21+6+1; 28+15+10+3; 21+15+10+6+3+1. *6 pont*
Összesen: 15 pont.

4. feladat: Az ábrán látható síkidomot bontsd fel a rácsvonalak mentén két egybevágó részre! Keresd meg az összes megoldást! Az egyik részt színezd ki!

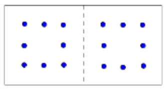


Megoldás:

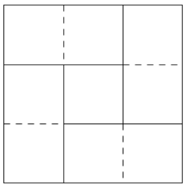


Minden megoldásért 2 pont. Hibás megoldás -1 pont. Az összpontszám nem lehet negatív.

Összesen: 22 pont

5. feladat: Lili dominókészletének legtöbb pöttyöt tartalmazó dominója: .

Négy dominóból Lili olyan négyztet rak ki, melynek minden oldalán 16 pötty látható.



Egy készletből rakj ki öt ilyen négyzetet! (Egy dominó csak egyszer használható!) A pöttyök helyett csak azok számát írd rá dominókra!

Megoldás:

8	8	0
2		8
6	2	8

7	7	2
6		7
3	6	7

6	6	4
5		8
5	7	4

4	4	8
7		3
5	6	5

8	7	1
5		7
3	5	8

Minden megoldásért 2 pont. Hibás megoldás -1 pont. Az összpontszám nem lehet negatív.

Hibátlan 5 megoldásért +3 pont jár!

Összesen: 13 pont