

MEGOLDÁSOK
Pontszerző Matematikaverseny 2016/2017 tanév
2. forduló

1. feladat

Péter egy építőjátékot kapott ajándékba. A játékban piros és kék színű golyók vannak, amelyekhez mágneses pálcikákat rögzítettek.



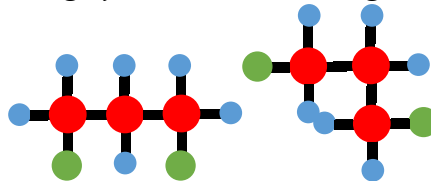
A golyókból alakzatokat lehet építeni a mágneses pálcikákkal összeillesztve őket. Születésnapjára kapott a játékhoz egy kiegészítő csomagot, amelyben zöld színű golyók voltak egy pálcikával.



A szabályok, amelyeket az építésnél be kell tartani:

1. A piros golyók négy másik golyóhoz csatlakozhatnak, amelyek lehetnek pirosak, zöldek vagy kékek.
2. A kék illetve zöld golyók csak egy másik golyóhoz csatlakozhatnak, amely lehet piros, zöld vagy kék.
3. A szabályok betartásával lehet tetszőleges hosszúságú láncokat építeni, de a láncban egyetlen pálcika sem maradhat szabadon, tehát golyónak kell hozzá csatlakoznia.

Például: 3 piros, 2 zöld és 6 kék golyó esetén két lehetséges alakzat:



4. Két alakzatot nem tekintünk különbözőnek, ha az alakzatokban szereplő piros golyók párba állíthatók úgy, hogy a szomszédaik azonosak a sorrendtől eltekintve.

Pl.: A fenti két szerkezet nem különbözik, mert mindkettőben két olyan piros golyó van, amelyhez 1 piros, 1 zöld és 2 kék kapcsolódik, valamint 1 olyan piros golyó van, amelyhez 2 piros és 2 kék kapcsolódik.

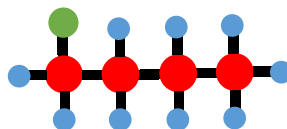
A szerkezetekhez szükséges golyók számát meg tudjuk adni a következő **összeg formában**:

P3K6Z2

Ez azt jelenti, hogy 3 piros, 6 kék és 2 zöld golyó szükséges a megépítésükhöz.

Feladatok:

- a) Rajzold le a négy szabálynak eleget tevő összes lehetséges szerkezetet, ha az építéshez 2 piros, 2 zöld és 4 kék golyót használhatsz!
- b) Rajzold le a négy szabály betartásával, az alábbi szerkezettel megegyező összeg formájú lehetséges szerkezeteket! Tehát azokat, amelyeknek ugyanez az „összeg” formája. (Csak azokat rajzold le, amelyek valóban különbözőek!)



c) Mennyi piros golyó szükséges a négy szabály betartásával, ha összesen 4 zöld és 10 kék golyót használhatsz?

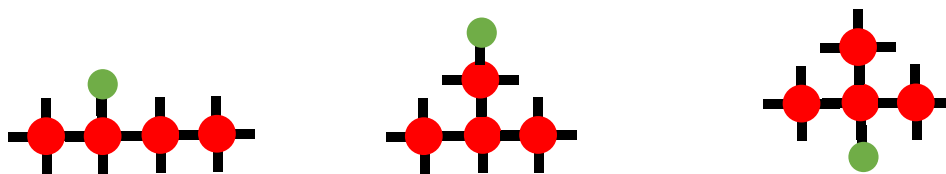
Megoldás:

a) Két lehetséges megoldás van, ami eleget tesz a szabályoknak. Az üres pálcikák végén vannak a kék golyók. (A két zöld golyó vagy azonos, vagy különböző piroshoz csatlakozik.)



Minden jó megoldás 2 pont, ha ugyanaz a megoldás többször is szerepel, akkor az az eset 1 pont. Maximum 4 pont.

b) Összesen további három szerkezet rajzolható:



(Az üres pálcikák végén vannak a kék golyók.)

Minden jó megoldás 2 pont, ha ugyanaz a megoldás többször is szerepel, akkor az az eset 1 pont. Maximum 6 pont.

c) 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 piros golyó szükséges.

Minden jó megoldás 2 pont

14 pont

Összesen: 24 pont

2. feladat: Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, melyben a számjegyek növekvő sorrendben követik egymást (nagyobb helyi értéken kisebb számjegy áll)? Válaszodat számítással indokold!

Megoldás:

Ha az első számjegy 1 és a második 2, akkor a harmadik 3-9 között lehet, ami 7 háromjegyű számot jelent. Ha a második számjegy 3, akkor a harmadik számjegy 4-9 között lehet, ami 6 háromjegyű számot jelent. Ezt folytatva, ha a második számjegy 4, akkor 5 háromjegyű számot kapunk. Ha a második számjegy 5, akkor 4 háromjegyű számot kapunk. Ha a második számjegy 6, akkor 3 háromjegyű számot kapunk. Ha a második számjegy 7, akkor 2 háromjegyű számot kapunk. Ha a második számjegy 8, akkor 1 háromjegyű számot kapunk.

Az 1-gyel kezdődők száma $7+6+5+4+3+2+1=28$.

7 pont

A 2-vel kezdődők száma $6+5+4+3+2+1=21$.

2 pont

A 3-mal kezdődők száma $5+4+3+2+1=15$.

2 pont

A 4-gyel kezdődők száma $4+3+2+1=10$.

2 pont

A 5-tel kezdődők száma $3+2+1=6$.

1 pont

A 6-tal kezdődők száma $2+1=3$.

1 pont

A 7-tel kezdődők száma $1=1$.

1 pont

Az adott tulajdonságú háromjegyű számok száma: 84.

1 pont

Összesen: 17 pont

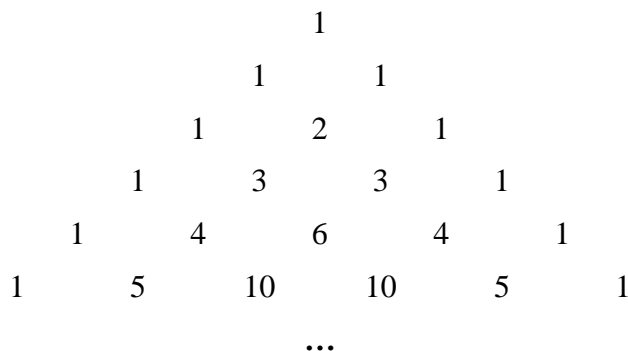
3. feladat: Írjunk fel számokat egy speciális elrendezésben egymás alatti sorokba, az úgynevezett Pascal háromszög elrendezésnek megfelelően (Blaise Pascal egy matematikus volt. A róla elnevezett számelrendezés a matematika több területén is kapcsolatba hozható az ottani összefüggésekkel.)

A Pascal féle háromszög:

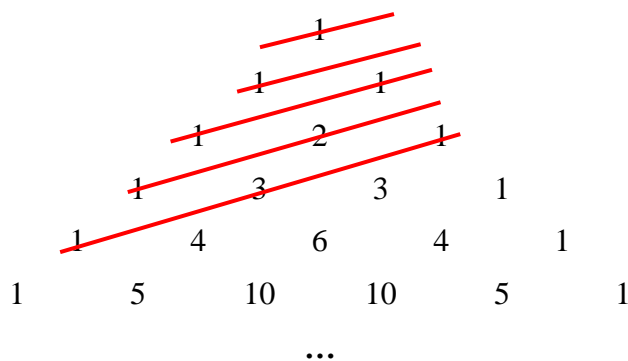
- Minden sor 1-essel kezdődik és végződik.

- A harmadik sortól kezdve a közbülső számok a fölöttük balra és fölöttük jobbra lévő számok összegei.

Pl. az első hat sor számai:



Rajzolj egymással párhuzamos szakaszokat a számokon keresztül az alábbi ábrának megfelelően!



Add össze az egyes vonalak alatti számokat (A vonalakat úgy kell rajzolni, hogy egyetlen szám se maradjon ki a Pascal háromszög számai közül, és minden számon csak egy vonal haladjon keresztül.) Ezek egy számsorozatot alkotnak.

Pl. a fenti ábrán az összegek: 1, 1, 2, 3, 5, ...

- a) Írd fel a számsorozat további négy tagját! (Tehát összesen az első kilenc számot a számsorozatból.)
- b) Keress szabályt az a) feladatrészben kapott számok sorozata között, és írd le!

Megoldás:

a) 1 1 2 3 5 8 13 21 34

Minden jó megoldás 1 pont. Maximum 4 pont.

b) A számok a Fibonacci sorozat elemei. A harmadik tagtól kezdve az előző két tag összege adja a következő elemet.

A szabály megfogalmazásáért 2 pont.

Összesen: 6 pont.

4. feladat: Huszonhét szabályos dobókockából (a szabályos dobókocka szemközti lapjain lévő pöttyök összege 7) egy nagyobb kockát szeretnék összeragasztani úgy, hogy az

összeragasztás után a nagyobb kocka öt lapjának középső kiskockáját eltávolítva a visszamaradt test felületén látható pöttyök száma a lehető legkevesebb legyen. Mennyi ez a legkevesebb pöttyszám? Válaszodat indokold!

Megoldás:

Egy dobókocka felületén látható pöttyök számának összege $3 \cdot 7 = 21$. A nagy kockából ötöt kiszedve 22 dobókocka marad a testben.

Szedjük külön típusokba a testben maradt dobókockákat és ez alapján számoljuk össze a rajtuk látható pöttyök számát úgy, hogy azok összege a legkisebb legyen.

Elhelyezkedés	Db	Egy kockán látható pöttyök száma	Összes látható pöttyök száma	
Középső	1	$7+7+1=15$	15	2 pont
Csúcs	8	$1+2+3=6$	$8 \cdot 6 = 48$	3 pont
Lapközép	1	1	1	2 pont
Élközepi (nincs lapközepi szomszédja)	8	$7+7=14$	$8 \cdot 14 = 112$	3 pont
Élközepi (egy lapközepi szomszédja van)	4	$7+1=8$	$4 \cdot 8 = 32$	3 pont
Összesen	22		208	2 pont

Összesen: 15 pont

5. feladat: Négy számkártyán a 0; 1; 2; 6 számjegyek szerepelnek, mindegyik számkártyán pontosan egy számjegy. Ezen számkártyák mindegyikét felhasználva műveleti jelek segítségével állítsd elő a tízes számrendszer számjegyeit. A számkártyákkal alkothatsz kétjegyű számokat, de zárójeleket nem használhatsz!

Megoldás:

- $0 = 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6$
- $1 = 1 + 0 \cdot 2 \cdot 6$
- $2 = 2 + 1 \cdot 0 \cdot 6$
- $3 = 0 \cdot 1 + 6 : 2$
- $4 = 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6$
- $5 = 6 - 2 + 1 + 0$
- $6 = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 6$
- $7 = 0 \cdot 2 + 1 + 6$
- $8 = 0 \cdot 1 + 2 + 6$
- $9 = 0 + 1 + 2 + 6$

Minden megoldásért 1 pont jár. Hibás megoldás -1 pont. Az összpontszám nem lehet negatív.

Összesen: 10 pont