MEGOLDÁSOK
Pontszerző Matematikaverseny 2016/2017 tanév
4. forduló

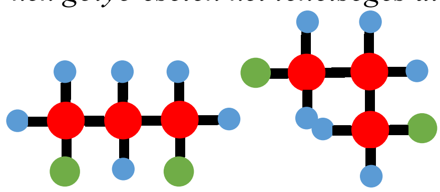
1. feladat
Péter egy építőjátékot kapott ajándékba. A játékban piros és kék színű golyók vannak, amelyekhez mágneses pálcikákat rögzítettek.

A golyókból alakzatokat lehet építeni a mágneses pálcikákkal összeillesztve őket. Születésnapjára kapott a játékhoz egy kiegészítő csomagot, amelyben zöld színű golyók voltak egy pálcikával.

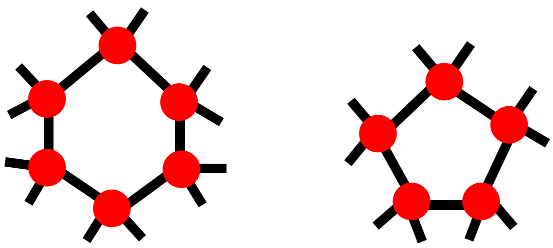
A szabályok, amelyeket az építésnél be kell tartani:

1. **A piros golyók négy másik golyóhoz csatlakozhatnak, amelyek lehetnek pirosak, zöldek vagy kékek.**
2. **A kék illetve zöld golyók csak egy másik golyóhoz csatlakozhatnak, amely lehet piros, zöld vagy kék.**
3. **A szabályok betartásával lehet tetszőleges hosszúságú láncokat építeni, de a láncban egyetlen pálcika sem maradhat szabadon, tehát golyónak kell hozzá csatlakoznia.**

   Például: 3 piros, 2 zöld és 6 kék golyó esetén két lehetséges alakzat:



4. **Öt vagy hat piros golyó gyűrűvé is záródhat.** Tehát a lánc első és ötödik vagy hatodik piros golyója összekapcsolódhat, így egy zárt gyűrűt alkotva. Az 1-3. szabályok továbbra is érvényesek.



4. **Két alakzatot nem tekintünk különbözőnek, ha az alakzatokban szereplő piros golyók párba állíthatók úgy, hogy a szomszédaik azonosak a sorrendtől eltekintve.**

A szerkezetekhez szükséges golyók számát meg tudjuk adni a következő **összegformában**:

P3K6Z2

Ez azt jelenti, hogy 3 piros, 6 kék és 2 zöld golyó szükséges a megépítésükhöz.

Feladat:

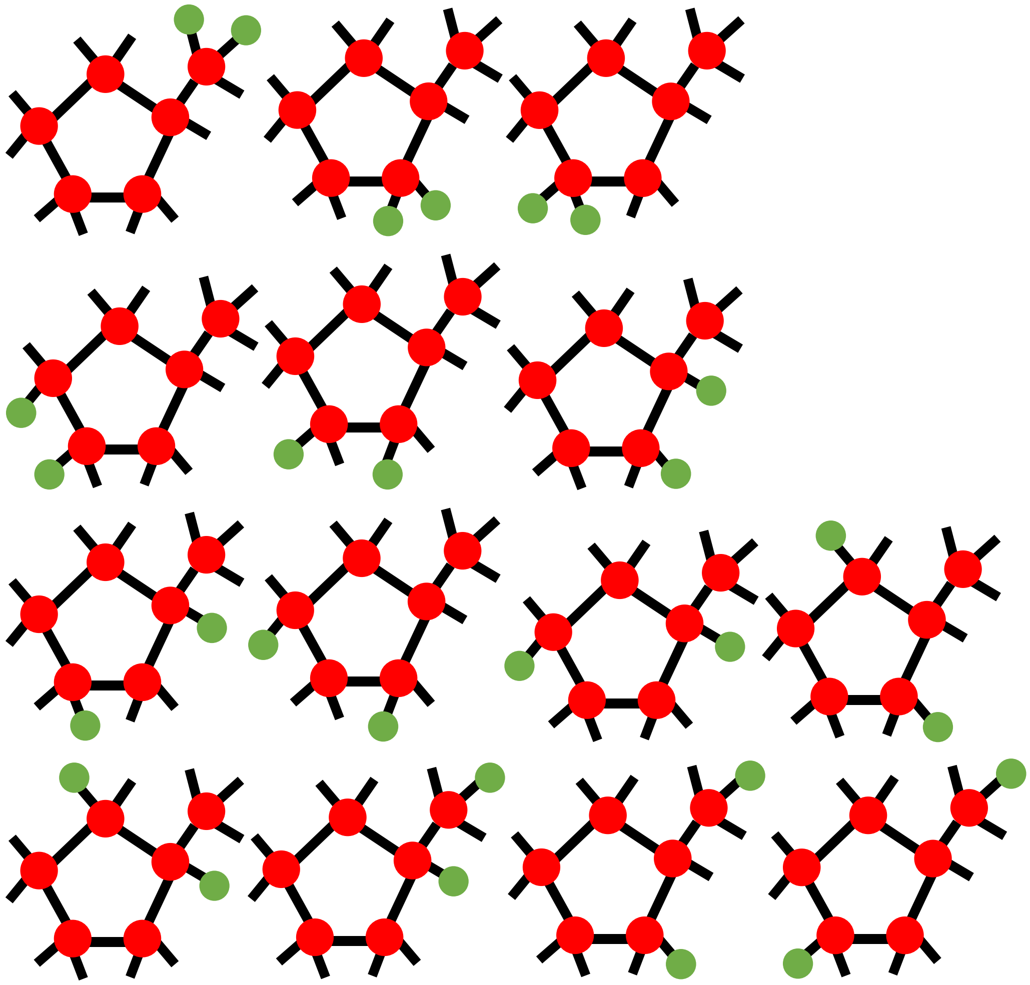
Rajzold le az öt szabálynak eleget tevő összes lehetséges szerkezetet, ha az építéshez 6 piros golyót és 2 zöld golyót használhatsz! A kék golyók számát tetszőlegesen meghatározhatod, de az öt szabályt be kell tartanod. Add meg a lehetséges összegformát is!

Megoldás:

A lehetséges összegforma: P6Z2K10. 1 *pont*

A szerkezetek (összesen **65**-féle lehetséges):

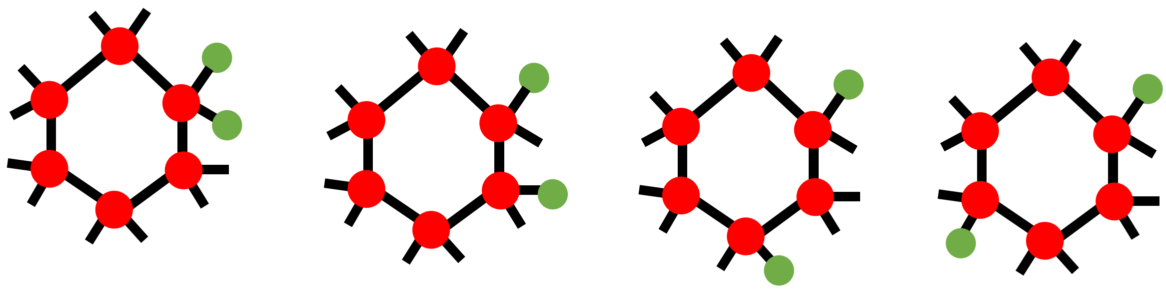
5 piros golyót tartalmazó gyűrűvel (A szabadon maradt csatlakozási pontokon kék golyók vannak.):



14-féle lehetséges szerkezet

Ha a lehetséges megoldások közül megjelenik egy, akkor az 1 pont, ha további megoldásokat is megad az újabb 1 pont. *Összesen 2 pont*

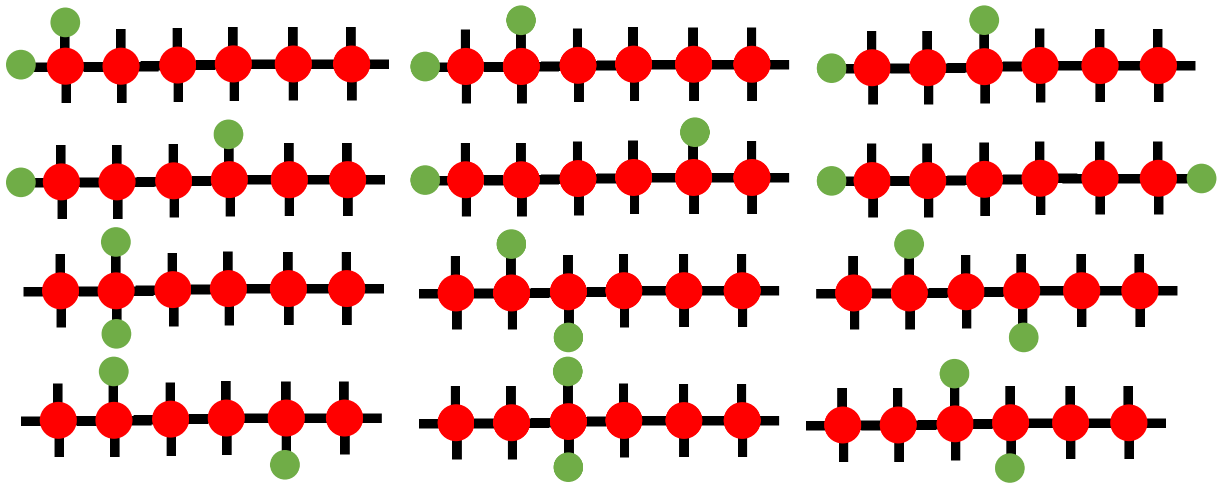
6 piros golyót tartalmazó gyűrűvel (A szabadon maradt csatlakozási pontokon kék golyók vannak.):



4-féle lehetséges szerkezet

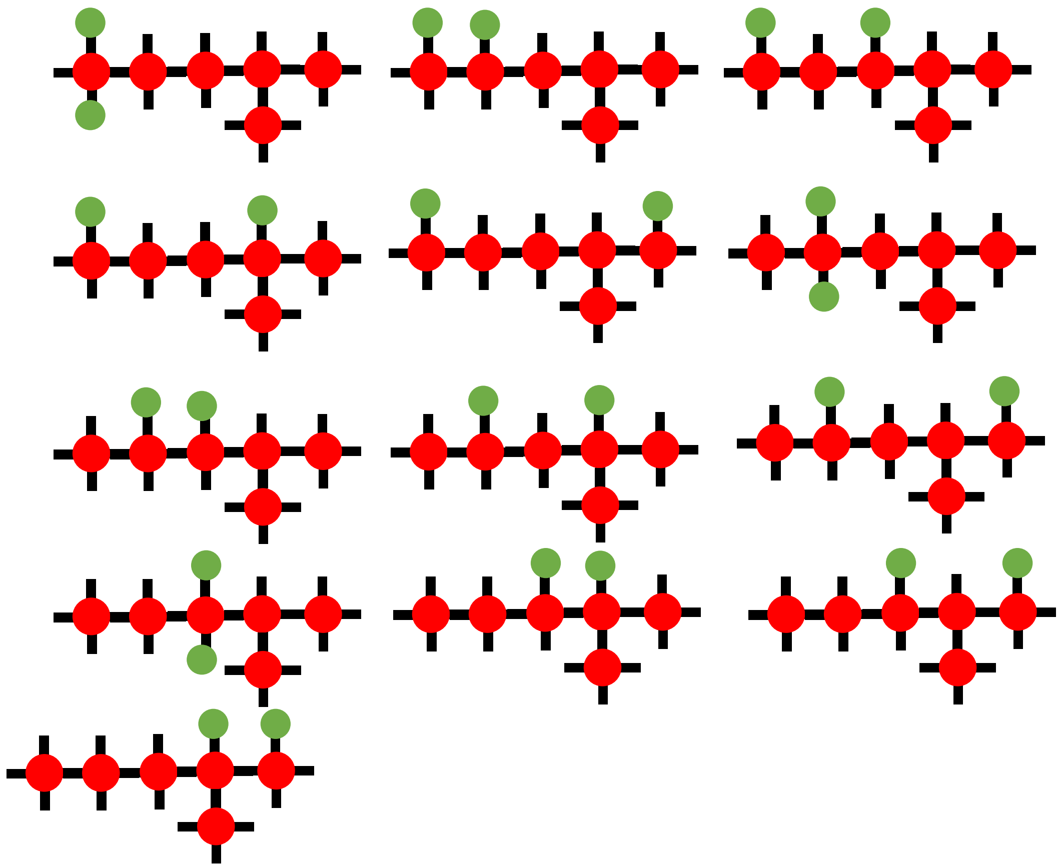
Ha a lehetséges megoldások közül megjelenik egy, akkor az 1 pont, ha további megoldásokat is megad az újabb 1 pont. *Összesen 2 pont*

Gyűrű nélküli szerkezetek (A szabadon maradt csatlakozási pontokon kék golyók vannak.)



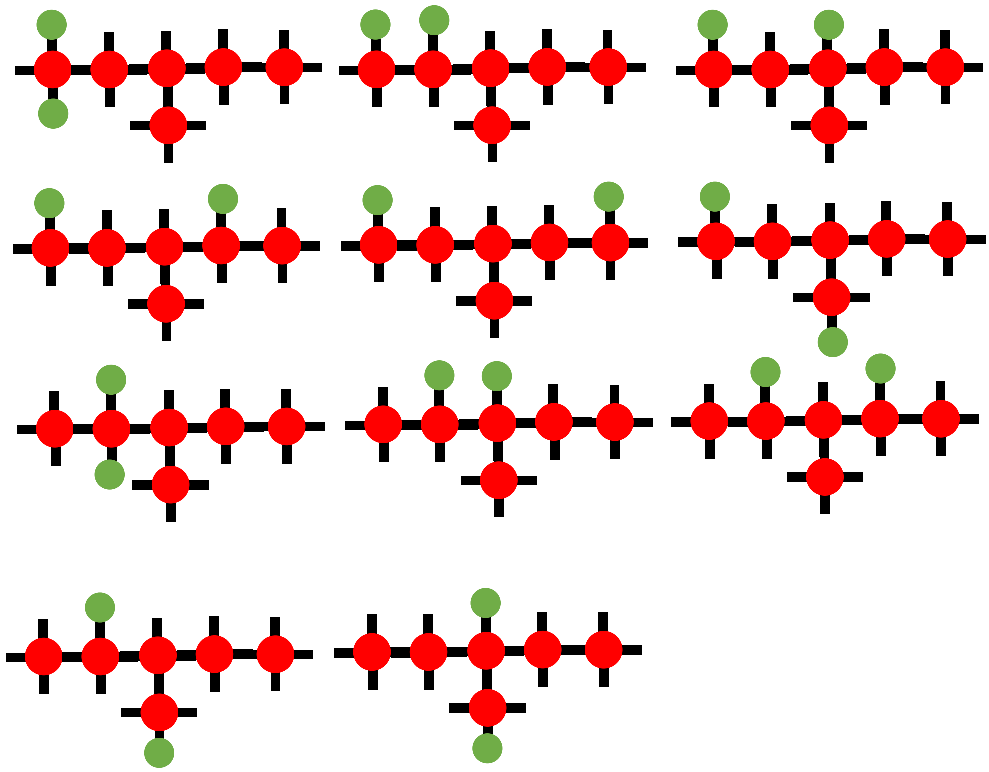
12-féle lehetséges szerkezet

Ha a lehetséges megoldások közül megjelenik egy, akkor az 1 pont, ha további megoldásokat is megad az újabb 1 pont. *Összesen 2 pont*



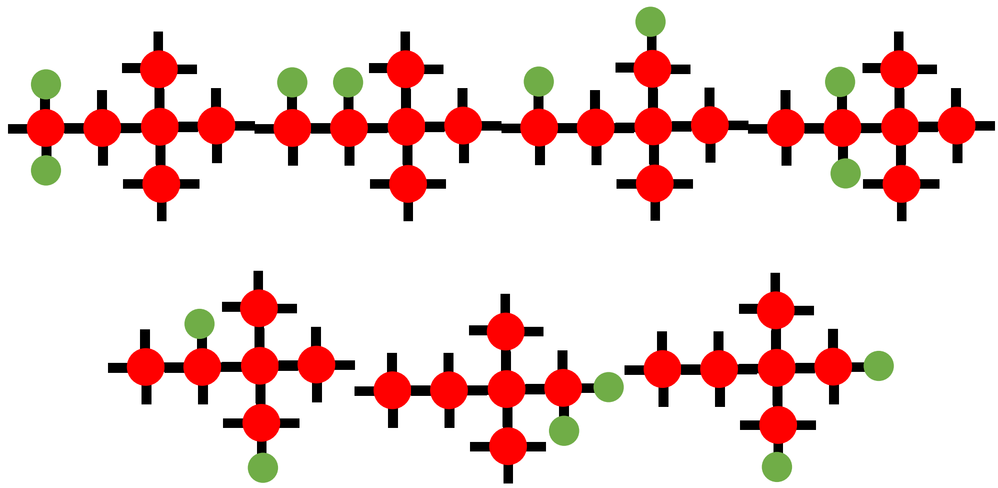
13-féle lehetséges szerkezet

Ha a lehetséges megoldások közül megjelenik egy, akkor az 1 pont, ha további megoldásokat is megad az újabb 1 pont. *Összesen 2 pont*



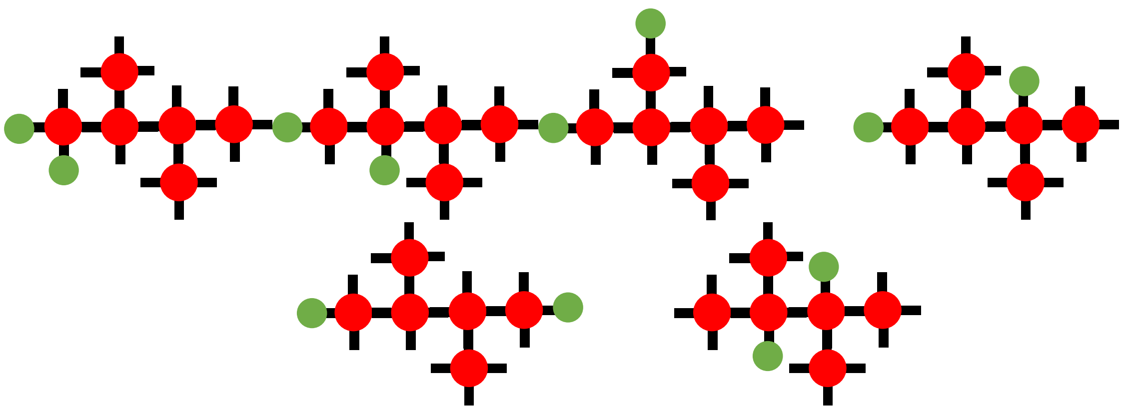
11-féle lehetséges szerkezet

Ha a lehetséges megoldások közül megjelenik egy, akkor az 1 pont, ha további megoldásokat is megad az újabb 1 pont. *Összesen 2 pont*



6-féle lehetséges szerkezet

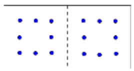
Ha a lehetséges megoldások közül megjelenik egy, akkor az 1 pont, ha további megoldásokat is megad az újabb 1 pont. *Összesen 2 pont*

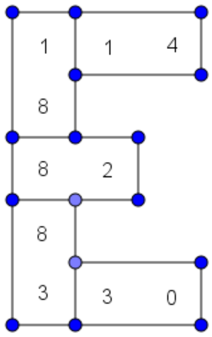


5-féle lehetséges szerkezet

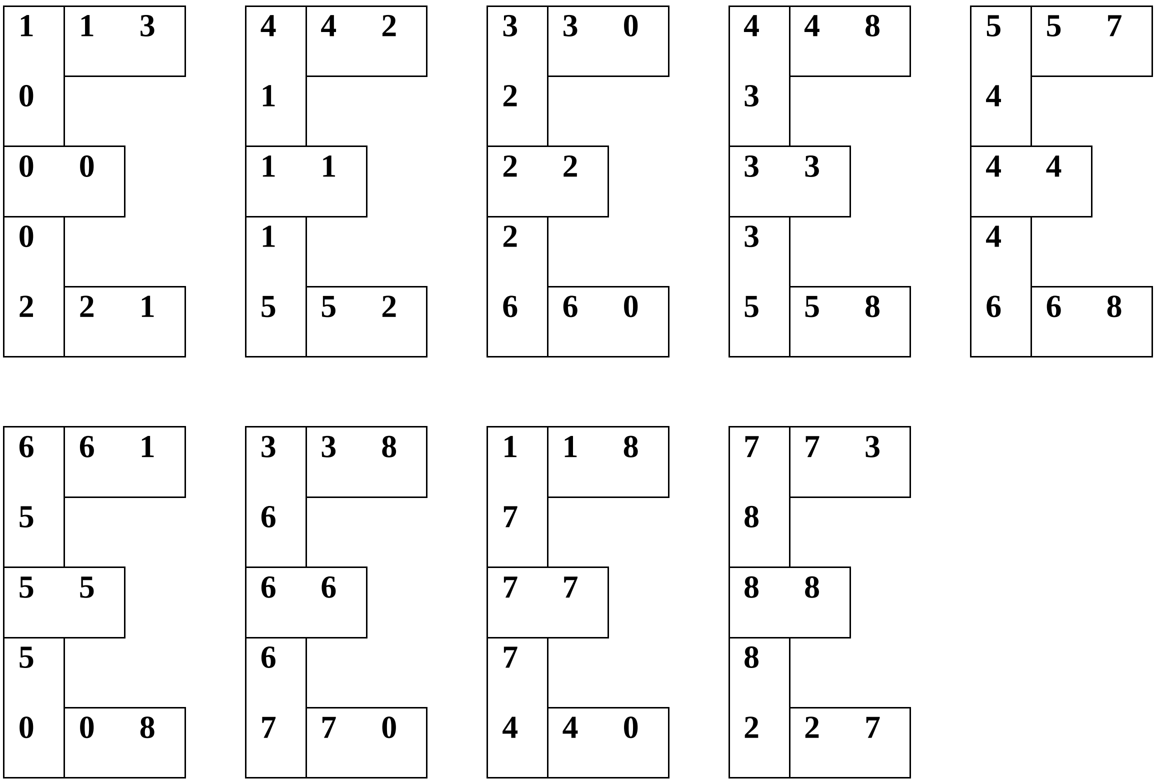
Ha a lehetséges megoldások közül megjelenik egy, akkor az 1 pont, ha további megoldásokat is megad az újabb 1 pont. *Összesen 2 pont*

Összesen: 15 pont

2. feladat: Lili dominókészletének legtöbb pöttyöt tartalmazó dominója: . Lili öt-öt dominó felhasználásával E betüket rakott ki a dominók illeszkedési szabályait betartva. Egy alkalommal a dominókészlet minden dominóját felhasználva sikerült 9 E betűt kiraknia. Adj meg te is egy 9 E betűs megoldást! A dominókra a pöttyök helyére az azok számát megadó számjegyet írd, lásd az ábrát!



Megoldás:



Minden megoldásért 2 pont jár. Hibás megoldás -1 pont. Az összpontszám nem lehet negatív.

Összesen: 18 pont

3. feladat: Az egyik téli reggelen a király nagyon jókedvűen ébredt, mert közelgett a karácsony és ilyenkor szeretett ajándékokat adni. Úgy gondolta, hogy a börtönében fogságban tartott rabok közül is elenged néhányat. Azt nem akarta, hogy a börtön üres legyen ezért egy ravasz matematikai módszert eszelt ki, hogy eldöntse, ki távozhat szabadon és ki marad a cellában.

A börtönében 30 cella volt és minden cellában egy-egy rab lakott. A cellák ajtaja meg volt számozva 1-től 30-ig és minden cella be volt zárva.

Megparancsolta a börtönőrének, hogy járja végig a cellákat és végezze el a következőket:

- Az első órában **minden cellánál**: *ha egy cella ajtaja zárva van, akkor azt nyissa ki, ha nyitva van zárja be.*
- A második órában **minden második cellánál**: *ha egy cella ajtaja zárva van, akkor azt nyissa ki, ha nyitva van zárja be.*
- A harmadik órában **minden harmadik cellánál**: *ha egy cella ajtaja zárva van, akkor azt nyissa ki, ha nyitva van zárja be.*
- (és így tovább)
- A harmincadik órában **minden harmincadik cellánál**: *ha egy cella ajtaja zárva van, akkor azt nyissa ki, ha nyitva van zárja be.*

A harmincadik óra elteltével, amelyik rab cellájának ajtaja nyitva volt, az szabadon távozhatott.

Feladatok:

a) Melyik sorszámú cellák ajtaja volt nyitva a 30. óra elteltével? (*Készíthetsz rajzot a megoldáshoz.*)

b) Ha a királynak több cellája lett volna, akkor melyik lenne a következő ajtó, amelyik nyitva lenne? Feltéve, hogy a börtönőr a fenti eljárást a cellák számának megfelelően ismétli. (Tehát ha 40 cella van, akkor 40 órán keresztül járja az ajtók sorát és nyitja-zárja a megfelelőeket.)

c) Keress szabályt a nyitva maradt cellák ajtósorszámai között! Írd le ezt a szabályt!

Megoldás:

a) A nyitva maradt cellák ajtósorszámai: 1; 4; 9; 16; 25 — 5 *pont*

b) A következő nyitva maradt ajtó sorszáma: 36 — 2 *pont*

c) A négyzetszámokat tartalmazó cellák ajtaja marad nyitva (páratlan az osztók száma).

Szabályként nem szükséges a négyzetszámokra utalni. Ha megad egy olyan szabályt, ami teljesíti a négyzetszámok előállítását akkor megfelelő az indoklás.

Például: A nyitva hagyott ajtók sorszámai egy olyan sorozatot alkotnak, amelyben az egymást követő tagok különbsége egy növekvő, egymást követő páratlan számokból álló sorozat:

1 +**3** → 4 +**5** → 9 +**7** → 16 +**9** → 25 +**11** → 36 … — 3 *pont*

Összesen: 10 pont.

4. feladat: Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, melyben a számjegyek szorzata nem nagyobb, mint öt?

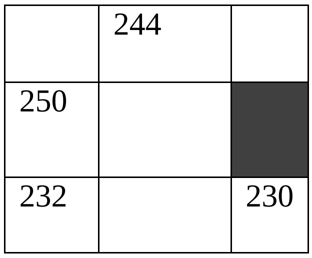
Megoldás:

A számjegyek szorzata 1; 2; 3; 4 és 5 lehet. — 1 *pont*
1 = 1·1·1. 1 ilyen szám van, a 111. — 1 *pont*
2 = 2·1·1. 3 ilyen szám van, a 211, a 121 és a 112. — 1 *pont*
3 = 3·1·1. 3 ilyen szám van, a 311, a 131 és a 113. — 1 *pont*
4 = 4·1·1. 3 ilyen szám van, a 411, a 141 és a 114. — 1 *pont*
4 = 2·2·1. 3 ilyen szám van, a 221, a 122 és a 212 — 1 *pont*
5 = 5·1·1. 3 ilyen szám van, a 511, a 151 és a 115. — 1 *pont*
Itt összesen 16 számot találtunk.

Ha a számjegyek szorzata 0:
100;101;102;103;104;105;106;107;108;109;110;120;130;140;150;160;170;180;190….19 db
200;201;……………………….19 db
300;301;……………………….19 db
400;401;……………………….19 db
stb…..
900;901;……………………….19 db
Tehát:
9 x 19= 171 ilyen szám van
Akkor összesen 187 szám van.
Aki megtalálta, hogy a számjegyek szorzata nulla is lehet, annak plusz pont jár. *2 pont*

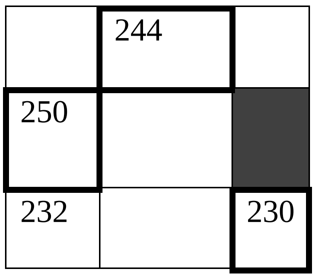
Összesen: 9 pont

5. feladat: Egy téglalapot 9 kisebb méretű téglalapra osztottunk. Négy téglalapba beírtuk azok centiméterben mért kerületének a mérőszámát. Hány centiméter a szürke színű téglalap kerülete? Hány centiméter a nagy téglalap kerülete? Válaszaid indokold!

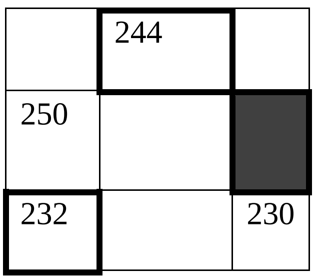


<u>**Megoldás:**</u>

Az alábbi ábrán az ismert kerületű téglalapok közül vastagabb vonallal jelöltük azt a három téglalapot, melyeknek a kerülete együttesen kiadják a téglalap kerületét. 3 *pont*



A fentiek alapján a téglalap területe 244 + 250 + 230 = 724 cm. 1 *pont*
Az alábbi ábrán két ismert kerületű téglalapokhoz az ismeretlen kerületű téglalapot választva, melyeknek kerületét vastagabb vonallal jelöljük. Ezen három téglalap kerülete együttesen ugyancsak kiadja a téglalap kerületét. 3 *pont*



A satírozott téglalap kerülete 724 – (244 + 232) = 248 cm. 2 *pont*

Összesen: 9 pont