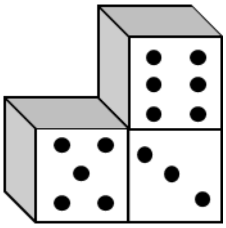
MEGOLDÁSOK
Brenyó Mihály Pontszerző Matematikaverseny 2019/2020 tanév
III. forduló

1. feladat:

A dobókocka 6 lapján pöttyök szerepelnek 1-től 6-ig.
Egy dobókockát ***szabályosnak*** nevezünk, ha a szemben lévő lapjain a pöttyök összege minden esetben 7.
Egy dobókockát ***ravasznak*** nevezünk, ha a szemben lévő lapjain a pöttyök különbsége minden esetben 3.
Három kockát illesztettünk össze, az ábrán látható módon. Az összes lehetséges megoldást add meg!



a) A fenti kockák négy szürkével színezett lapján mennyi lehet a pöttyök összege, ha mindhárom kocka szabályos?
b) A fenti kockák négy szürkével színezett lapján mennyi lehet a pöttyök összege, ha mindhárom kocka ravasz?
c) A fenti kockák négy szürkével színezett lapján mennyi lehet a pöttyök összege, ha a szürkével színezett lapot tartalmazó kockák közül az egyik szabályos, a másik pedig ravasz?

Megoldás:

a) 9 és 19 között valamennyi egész szám lehet az összeg.

A legkisebb összeg a 9 = 1 + 3 + 3 + 2, a legnagyobb összeg a 19 = 6 + 4 + 4 + 5 = 19
2 *pont*

A két összeg között minden természetes szám elő áll, mert a kockák forgatásával az összeg növelhető 1-gyel (3→4), 2-vel (3→4 és 3→4), 3-mal (2→5), 4-gyel (3→4 és 2→5), 5-tel (1→6), 6-tal (3→4 és 1→6), 7-tel (3→4, 3→4 és 1→6), 8-cal (2→5 és 1→6), 9-cel (3→4 2→5 és 1→6) és 10-zel (3→4, 3→4, 2→5 és 1→6), 5 *pont*

b) A legkisebb összeg a 7 = 1 + 3 + 1 + 2, ami nőhet 3-mal, 6-tal, 9-cel és 12-vel. 2 *pont*
Így a pöttyök összege lehet 10, 13, 16 vagy 19. 2 *pont*

c) Ha az alsó, ravasz akkor a legkisebb összeg 7(= 1 + 3 + 2 + 3), ami növelhető: 1, 3, 4, 6, 7, 9 és a 10 számok valamelyikével. Így az összeg lehet 9 és 19 között minden egész szám kivéve a 11-et, a 14-et és a 17-et. 3 *pont*
Ha az alsó szabályos, akkor a legkisebb összeg 9(= 1 + 3 + 2 + 1), ami növelhető: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11 és 12 számok valamelyikével. 3 *pont*
Tehát a 7 és 19 között, a 17-et kivéve valamennyi egész szám lehet az összeg. 1 *pont*

Összesen: 18 pont

2. feladat:

Van négy egyforma méretű piros, kék, sárga és zöld golyó, és van egy hasáb, melybe négy a golyók méretével megegyező nagyságú félgolyó formájú üreg van. Az üregeket befestettük a golyók színével, mindegyik színt pontosan egyszer felhasználva. Hányféleképpen helyezhető el a négy golyó az üregekben, ha legfeljebb két golyó kerülhet a színével azonos színű üregbe? Válaszod indokold!

Megoldás:

A négy golyó a négy helyre összesen 24 féleképpen helyezhető el. Az első lyukba négy golyóból választhatunk, ez négy lehetőség. Minden első golyóhoz a második lyukba 3 golyóból választhatunk, így az első két golyót 4 · 3 féleképpen helyezhetjük el. A harmadik helyre a maradék két golyót kétféleképpen tehetjük, míg az utolsót már csak egyféleképpen. Így az összes lehetőség: 4 · 3 ·2 · 1 =24. 6 *pont*

Ezekből vegyük ki a rossz eseteket, azaz amikor mind a négy a helyén van, illetve amikor három van a helyén. 2 *pont*

Egy olyan est van, amikor mindegyik ugyanolyan színű lyukba kerül. 1 *pont*

Pontosan három nem lehet a helyén, mert ekkor a negyedik is a helyén lenne, tehát ilyen lehetőség nincs. 3 *pont*

Így amikor legfeljebb két golyó van a helyén 24 – 1=23. 2 *pont*

Megjegyzés: Ha a helyén lévők szerint számolja össze a jó eseteket, akkor is ezt pontot kapja. Arányosan elosztva.

Összesen: 14 pont

3. feladat:

Egy pozitív egész számot szépségesnek nevezünk, ha a szám elejéről, vagy a végéről, vagy mindkét irányból néhány számjegyet letörölve az eredeti szám számjegyeinek az összegével egyező számot kapjuk (pl.: 3126-ből a 12). Hány olyan huszonegyedik századi évszám van, melyekből előállíthatók szépséges számok? Mindegyik szépséges számból írj legalább egyet! Válaszod indokold!

Megoldás:

A XXI-edik század évszámai 2001 01. 01-2100 12.31. közötti időszak. 1 *pont*

Az ilyen évszámok számjegyeinek az összege 3 és 20 közötti természetes számok. 3 *pont*

A számjegy összeg nem lehet egyjegyű, mert ekkor három számjegyet kell elhagyni, és a visszamaradó számjegy csak akkor lesz egyenlő a számjegyek összegével, ha csak 0-kat hagyunk el. Ez 2000 estén teljesül, de ez nem XXI. századi. 2 *pont*

A 2020 és 2098 közötti évszámokban a számjegyek összege 3 - 19 között van. 2 *pont*

Láttuk, hogy egyjegyű nem lehet. 10 és19 közötti sem lehet, mert a fenti számok 1-es számjegyet csak az 1-esek helyi értékén tartalmazhatnak. 2 *pont*

A fennmaradó számok közül a 2017, 2018 és a 2019 számjegyeinek az összege lesz kétjegyű. 1 *pont*

A 2017-hez tartozó szépséges számok: 1027, 1072, 2107, 7102, 2710, 7210. 1 *pont*

A 2018 nem jó, nincs benne két 1-es. 1 *pont*

A 2019-hez tartozó szépséges számok: 1209, 1290, 9120, 9012. 1 *pont*

Összesen: 14 pont

4. feladat:

Lali és édesapja életévei korának összege 44 év. Lali 14 év múlva feleannyi éves lesz, mint édesanyja. 17 év múlva fele olyan idős lesz, mint édesapja. Hány éves Lali és szülei most?

Megoldás:

Lali és apja 17 év múlva életkoruk összege78 év lesz. *2 pont*

A 78 év Lali életkorának a háromszorosa, mivel apja kétszer olyan idős, mint Lali. *2 pont*

Így Lali 17 év múlva 26 éves lesz. *1 pont*

Lali és apja most 9, illetve 35 éves. *2 pont*

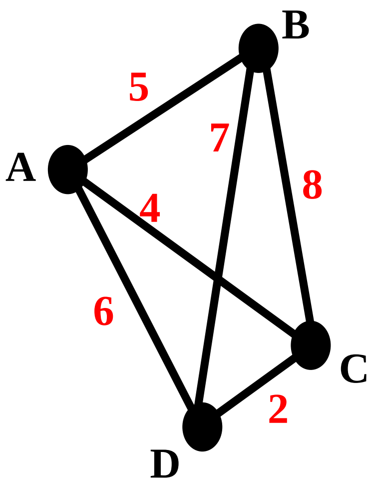
Lali anyja 14 év múlva 46 éves lesz, így most 32 éves. 1 *pont*

Összesen: 8 pont

5. feladat:

Az alábbi ábra egy térképet szemléltet. A térképen négy város látszik (*a térképen a pontok*), amelyek neve: A, B, C illetve D. A városokat utak kötik össze, amelyeket a térképen egyenes vonalak (szakaszok) jelölnek. Hamilton egy utazó ügynök, aki **A** városban lakik. Szeretné bejárni az összes várost úgy, hogy minden városban pontosan egyszer legyen és végül visszatérjen **A** városba. A városok között csak az egyenes utakon közlekedhet, és ugyanazon az úton csak egyszer haladhat. (*Nem kell valamennyi úton végig mennie. Az **A** és **C**, valamint a **B** és **D** városokat összekötő utak keresztezik egymást, de a kereszteződésnél nem térhet át a másik útra.*) Az utak hosszát a melléjük írt (piros) számok jelzik.

Például egy útvonal: **ABCDA**, ami azt jelenti, hogy **A**-ból indul, majd **B**-be megy, onnan tovább halad **C** városba, majd **C**-ből **D**-be, végül **D**-ből visszatér az **A** városba. Eközben megtett útjának a hossza: 21.



a) Mennyi az út hossza, ha **ACBDA** útvonalon halad?

b) Van-e másik útvonal, amelynek ugyanannyi a hossza, mint az a) feladatban megadott útnak? Add meg az útvonalat a példánál mutatott módon!

c) Add meg a legrövidebb hosszúságú útvonalat úgy, hogy Hamilton **A**-ból indul és oda is tér vissza, miközben bejárja a másik három várost is a szabályok szerint! (Ha több megoldás is van, akkor valamennyit add meg!) Mennyi ennek az útvonalnak a hossza?

Megoldás:

a) 25 1 *pont*

b) ADBCA *2 pont*

c) Két azonos hosszúságú legrövidebb útvonal van: ABDCA és ACDBA. Ezek hossza: 18. *4 pont*

Összesen: 7 pont