MEGOLDÁSOK
Pontszerző Matematikaverseny 2019/2020 tanév
IV. forduló

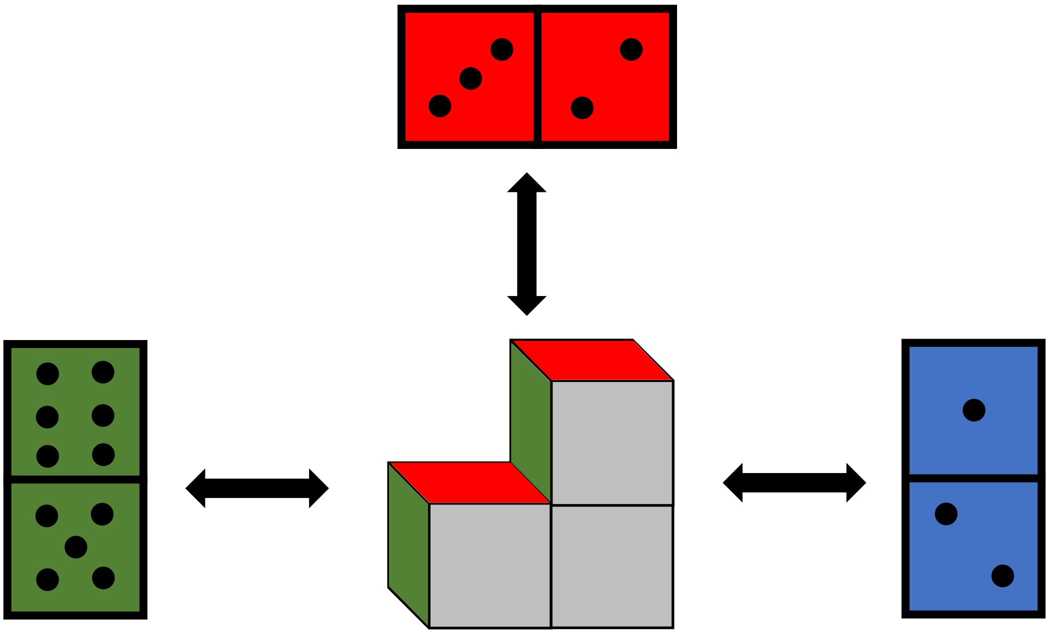
1. feladat:

A dobókocka 6 lapján pöttyök szerepelnek 1-től 6-ig.

Egy dobókockát ***szabályosnak*** nevezünk, ha a szemben lévő lapjain a pöttyök összege minden esetben 7.

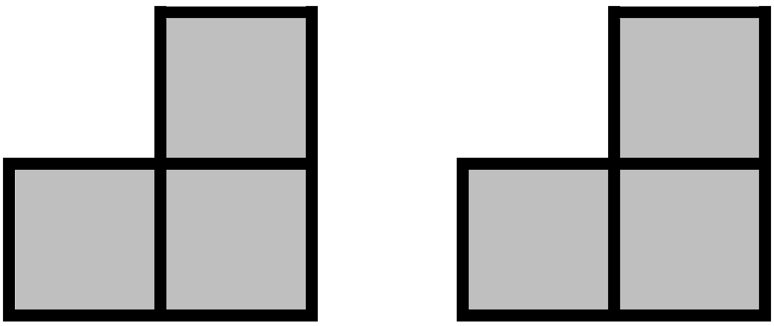
Egy dobókockát ***ravasznak*** nevezünk, ha a szemben lévő lapjain a pöttyök különbsége minden esetben 3.

Három kockát illesztettünk össze, az ábrán látható módon. A kockák esetén megadtuk, hogy mit látna az, aki a kockákat oldalról vagy fentről nézné. A három kocka bal oldali nézetét mutatja a zöld, jobb oldali nézetét a kék és fenti nézetét a piros ábra. Az összes lehetséges megoldást add meg!



a) A fenti kockák három szürkével színezett lapján mennyi lehet a pöttyök összege, ha mindhárom kocka szabályos?

b) Adj meg két különböző kockaállást, amelynél a szürke lapokon szereplő számok összege 13? A szürke lapokon látható pöttyöket rajzold az alábbi ábrákba!



c) A fenti kockák három szürkével színezett lapján mennyi lehet a pöttyök összege, ha az egyik kocka szabályos, a másik kettő pedig ravasz?

d) Előfordulhat-e, hogy a szürkével színezett lapok mindegyikén ugyanannyi pötty szerepel?

Ha igen, akkor azt is add meg, hogy mennyi ilyenkor a szürkével színezett lapokon a pöttyök összege!

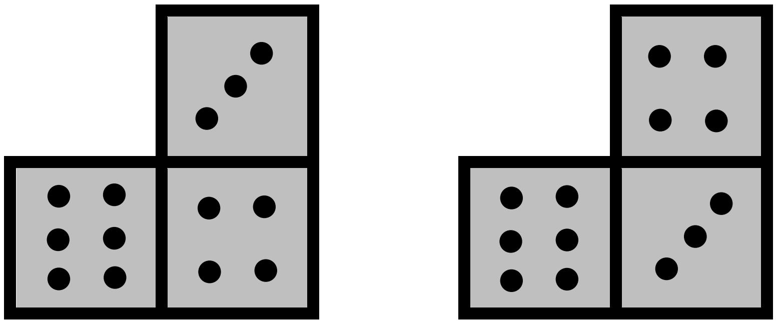
Megoldás:

a) A bal alsó lapon lehet 1, vagy 6; a jobb alsón 1, 3, 4, 6; a felsőn 3, 4. 2 *pont*

Így az 5 és 16 között minden természetes szám lehet megoldás. (1+1+3=5, 1+1+4=6, 1+3+3=7, 1+3+4=8, 1+4+4=9, 1+6+3=10, 1+6+4=11; az első 1-est 6-ra cserélve minden összeg 5-tel nő.)

4 pont

b) A két lehetséges megoldás:



2 *pont*

c) A három kocka közül a legfelső nem lehet ravasz, mert a 6-ossal szemben az 1-es szerepel. *1 pont*

Így az alsó két kocka mindegyike ravasz. *1 pont*

A bal alsó lapon lehet 1, 4; a jobb alsón 1, 3, 4, 6; a felsőn 3, 4. 2 *pont*

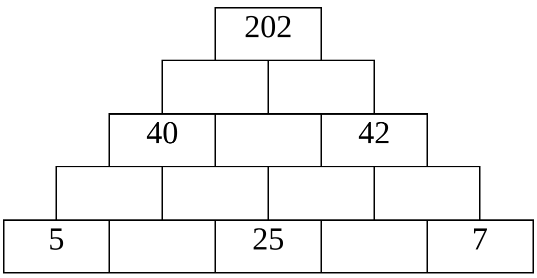
A lehetséges összegek: 5 és 14 között minden természetes szám megoldás; hasonlóan, mint az a) esetben, csak azzal a különbséggel, hogy az 1-es helyett négyest írunk. 4 *pont*

d) Igen előfordulhat két esetben is. A pöttyök összege: 9 vagy 12 lehet. 2 *pont*

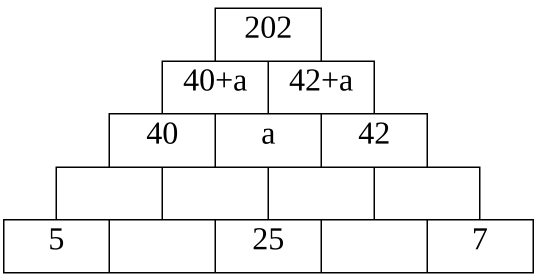
Összesen: 18 pont

2. feladat:

Az ábrán látható számpiramisban két egymás mellett lévő mezőben számok összege szerepel a felettük lévő mezőben. Számításokkal határozd meg az üres mezőkbe írható számokat!



Megoldás:



A táblázatba beírtak alapján 40 + a + 42 + a = 202. 3 *pont*

Innen a = 60. 1 *pont*

<table>
<tr><td colspan="4"></td><td colspan="2">202</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="2">100</td><td colspan="2">102</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">40</td><td colspan="2">60</td><td colspan="2">42</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">5+b</td><td colspan="2">25+b</td><td colspan="2">25+c</td><td colspan="2">c+7</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">5</td><td colspan="2">b</td><td colspan="2">25</td><td colspan="2">c</td><td colspan="2">7</td></tr>
</table>

A táblázat alsó két soráért. 2 *pont*

A táblázatba beírtak alapján 5+b+25+b=40, ahonnan b=5. 2 *pont*

Ugyanígy 25+c+c+7=42, ahonnan c=5. 2 *pont*

<table>
<tr><td colspan="4"></td><td colspan="2">202</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="2">100</td><td colspan="2">102</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">40</td><td colspan="2">60</td><td colspan="2">42</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">10</td><td colspan="2">30</td><td colspan="2">30</td><td colspan="2">12</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">5</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">25</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">7</td></tr>
</table>

A helyesen kitöltött táblázat. 2 *pont*

Összesen: 12 pont

3. feladat:

Lili tizenegy korongra ráírta 1-11-ig a természetes számokat, majd két csoportba rakta a korongokat. Az egyik csoportban a számok összege pontosan 5-szöröse volt, mint a másikban. Milyen számok kerülhettek az egyes csoportokba, ha mindkét csoportban legalább három korong szerepelt? Keresd meg az összes lehetőséget! Válaszodat indokod!

Lili azt a feladatot adta barátjának, Lalinak, hogy a tizenegy korongot ossza szét két csoportba úgy, hogy az egyik csoportban lévő számok összege 7-szerese legyen a másik csoportban lévő számok összegének. Meg tudja-e oldani a feladatot Lali? Válaszodat indokod!

Megoldás:

A 11 cédulán lévő számok összege 1+2+3+ … +10+11=66. 2 *pont*

A feltételeknek megfelelően az egyik csoportban lévő számok összegének 11-nek, a másikban lévők összegének 55-nek kell lennie. 1 *pont*

Elég az egyik csoport elemeit leírni. Ezek: 1+2+8=11, 1+3+7=11, 1+4+6=11, 2+3+6=11, 2+4+5=11, 1+2+3+5=11. 6 *pont*

Lali nem tudja megoldani Lili feladatát, mert a cédulákon lévő számok összege nem osztató nyolccal. 2 *pont*

Összesen: 11 pont

4. feladat:

Csak a 2 és a 0 számjegyeket és műveleti jeleket használva állítsd elő 1-től 19-ig a természetes számokat! A lehető legkevesebb számjegy használatára törekedj! Ha segít, akkor alkothatsz kétjegyű számokat is, de zárójelet ne használj!

Megoldás:

1=2:2; 2=2·2:2; 3=2+2:2; 4=2·2; 5=2·2+2:2; 6=2+2+2; 7=2·2·2 – 2:2; 8= 2·2·2; 9=22:2 – 2; 10=20:2; 11=22:2; 12=20:2+2; 13=22:2+2; 14=2·2·2·2 – 2; 15=22:2+2·2; 16; 17=2·2·2·2+2:2; 18=20 – 2; 19=20 – 2:2.

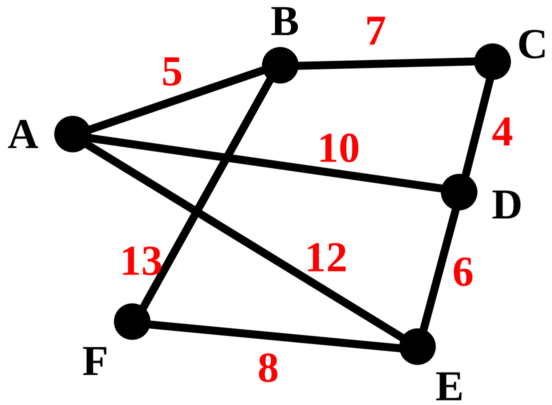
Minden jó megoldás 0,5 pont. Hibás megoldás -0,5 pont, összpontszám nem lehet negatív. Maximum 9,5 pont

Összesen: 9,5 pont

5. feladat:

Az alábbi ábra egy térképet szemléltet. A térképen hat város látszik (*a térképen a pontok*), amelyek neve: A, B, C, D, E illetve F. A városokat utak kötik össze, amelyeket a térképen egyenes vonalak (szakaszok) jelölnek. Hamilton egy utazó ügynök, aki **A** városban lakik. Szeretné bejárni az összes várost úgy, hogy minden városban pontosan egyszer legyen és végül visszatérjen **A** városba. A városok között csak az egyenes utakon közlekedhet, és ugyanazon az úton csak egyszer haladhat. (*Nem kell valamennyi úton végig mennie. Ha a városokat összekötő utak keresztezik egymást, akkor nem térhet át a másik útra.*) Az utak hosszát a melléjük írt (piros) számok jelzik.

Például egy útvonal: **ABFEA**, ami azt jelenti, hogy **A**-ból indul, majd **B**-be megy, onnan tovább halad **F** városba, majd **F**-ből **E**-be, végül **E**-ből visszatér az **A** városba. Eközben megtett útjának a hossza: 38.



a) Mennyi a **DCBFEAD** út teljes hossza?

b) Add meg a legrövidebb hosszúságú útvonalat úgy, hogy Hamilton **A**-ból indul és oda is tér vissza, miközben bejárja a másik öt várost is a szabályok szerint! (Ha több megoldás is van, akkor valamennyit add meg!) Mennyi ennek az útvonalnak a hossza?

c) Be tudja-e járni **A**-ból **B**-be indulva és oda visszatérve az összes várost a szabályok szerint? Ha igen, akkor add meg az út hosszát, ha nem, akkor indokold meg miért nem!

Megoldás:

a) 54 — 2 *pont*

b) ADCBFEA vagy AEFBCDA (ugyanaz a kör, csak ellentétes irányban haladva) A hossz: 54 — 2 *pont*

c) Nem, mert a lehetséges útvonalak:

ABCDEF – nem tud F-ből visszatérni A-ba, mert nincs út F és A között. — 2 *pont*
ABFEDC – nem tud C-ből visszatérni A-ba, mert nincs út C és A között. — 2 *pont*

Összesen: 7 pont