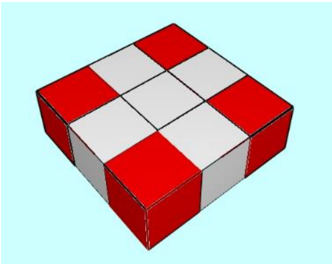
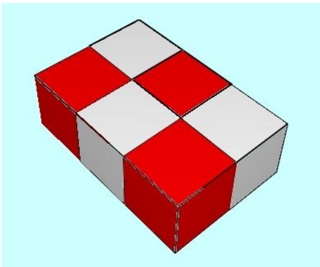
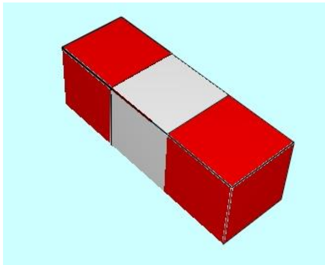
REGIONÁLIS DÖNTŐ
4. OSZTÁLY

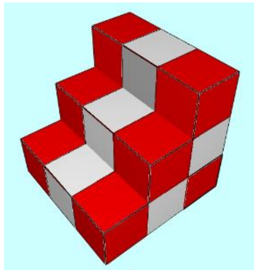
1. feladat

Tamásnak 18 egyforma méretű építőkockája van. Öt fehér és négy piros kockából kirakta az 1. ábrán látható testet, majd három piros és három fehér kockából kirakta a 2. ábrán látható testet, és a megmaradt három kockából a 3. ábrán látható testet. Végül a három testet egymásra illesztette, amint az a 4. ábrán látható.


1. ábra


2. ábra


3. ábra


4. ábra

Figyeld meg a **4. ábrát**, majd válaszolj a kérdésekre!
a) Hány piros oldallap érintkezik fehér oldallappal? (Két oldallap érintkezik, ha fedik egymást.)
b) Hány piros él érintkezik fehér éllel? (Két él érintkezik, ha van legalább két közös pontjuk.)

Megoldás:

a) - Az **1. ábrán látható test** esetében a sarkokban található piros kockák szomszédja 2-2 fehér kocka, így **8** piros oldallap érintkezik fehér oldallappal. - A **2. ábrán látható test** esetében a sarkokban található piros kockák 2-2 oldallapja és a középen található piros kocka 3 oldallapja, azaz **7** piros oldallap érintkezik fehér oldallappal. - A **3. ábrán látható test** esetében **2** piros oldallap érintkezik fehér oldallappal. - Az **1. és a 2. ábrán látható testek** egymásra helyezése következtében az alsó test öt kockájára egy-egy más színű kocka kerül, így újabb **5** piros oldallap érintkezik fehér oldallappal. - A **3. szinten** a felső test mind a három kockája egy-egy más színű kockára kerül, így újabb **3** piros oldallap érintkezik fehér oldallappal. - Tehát a **4. ábrán** látható testben **25** piros oldallap érintkezik fehér oldallappal.	**4 pont:** **0,5p:** Az 1. ábrán látható test piros kockáinak 8 oldallapja érintkezik fehér oldallappal. **0,5p:** A 2. ábrán látható test piros kockáinak **7** oldallapja érintkezik fehér oldallappal. **0,5p:**A 3. ábrán látható test piros kockáinak 2 oldallapja érintke-zik fehér oldallappal. **0,5p:** Az 1. és a 2. szintet alkotó testek piros kockáinak **5** oldal-lapja érintkezik fehér oldal-lappal. **1p:** A felső szinten **3** piros oldallap érintkezik fehér oldal-lappal. **1p:** A **25** oldallap meghatározása
b) - Az **1. ábrán látható test** esetében a sarkokban található piros kockák 7-7 éle, azaz összesen **28** piros él érintkezik fehér éllel. Ezek a piros	**4 pont:** **0,5p:** Az 1. ábrán látható test estében a sarkokban található

kockák 2-2 belső oldallapján található élek. - A **2. ábrán látható test** esetében a középen lévő piros kocka 10 éle, valamint a sarkokban található piros kockák 7-7 éle, azaz összesen **24** piros él érintkezik valamely fehér kocka élével. - A **3. ábrán látható test** esetében a fehér kocka melletti piros kockák 4-4 éle, azaz **8** piros él érintkezik fehér éllel. - Az **1. és a 2. szintet alkotó két test** egymásra helyezése következtében újabb **9** piros él érintkezik fehér éllel. Ezek az alsó szinten a sarkokban található piros kockák felső élei közül a két-két külső él (2+2=4), valamint a második szinten található piros kockák alsó-külső élei (2+2+1=5). - A **2. és a 3. szintet alkotó testek** egymásra helyezése következtében újabb **7** piros él érintkezik fehér éllel. Ezek a 3. szint piros kockáinak három-három éle, valamint a középső fehér kocka külső éle (3+3+1=7). - Tehát a **4. ábrán látható testben összesen** 28+24+8+9+7=**76** piros él érintkezik fehér éllel. **Vagy** - Megszámláljuk, hogy a piros kockák hány éle nem érintkezik fehér éllel. Az **1. szinten** a sarkokban található piros kockák 3-3 éle, valamint a sarokban található két piros kocka újabb 2-2 éle; a **2. szinten** a sarkokban található piros kockák 3-3 éle; a **3. szinten** ugyancsak a sarkokban található piros kockák 5-5 éle, azaz **összesen** $4X3 + 2X2 + +3X2 + 5X2 = \mathbf{32}$ **piros él nem érintkezik fehér éllel.** - Egy kockának 12 éle van, **a kilenc piros kockának $\mathbf{9 \times 12 = 108}$ éle van.** - Mivel 32 él nem érintkezik fehér éllel, $108 - 32 = \mathbf{76}$ **piros él érintkezik fehér éllel.**	piros kockák **28** éle érintkezik fehér éllel. **0,5p:** A 2. ábrán látható test esetében a középen található piros kocka 10 éle érintkezik a fehér kocka élével. **0,5p:** A 2. ábrán látható test esetében **24** piros él érintkezik fehér kocka élével. **0,5p:** A 3. ábrán látható test esetében **8** piros él érintkezik fehér éllel. **0,5p:** A 1. és 2. szintet alkotó testek egymásra helyezése következtében **9** piros él érint-kezik fehér éllel. **0,5p:** A 2. és 3. szintet alkotó testek egymásra helyezése következtében **7** piros él érint-kezik fehér éllel. **1 p:** A **76 él** meghatározása ***Megjegyzés:*** *Ha más módszerrel helyesen számlálja meg az éleket, akkor is maximális pontszám jár.*
Felelet: Az ábrán látható testben **25** piros oldallap érintkezik fehér oldallappal és **76** piros él érintkezik fehér éllel.	**2p:** helyes feleletek
Összpontszám:	**10 pont**

2. feladat

A 2024 olyan négyjegyű szám, amelyben a számjegyek párosak, és az első két számjegyből alkotott szám 4-gyel kisebb, mint az utolsó két számjegyből alkotott szám.

a) Hány ilyen négyjegyű szám van? Sorold fel a számokat!
b) Kati leírta az összes ilyen számot csökkenő sorrendben. A számok közé nem tett vesszőt, helyközt sem hagyott ki közöttük. Melyik a Kati által leírt 21. számjegy?

Megoldás:

a) $\overline{abcd}$ a keresett szám, számjegyei párosak és $\overline{ab} = \overline{cd} - 4$ Az a számjegy csak 2, 4, 6 vagy 8 lehet. - Ha $a = 2$, akkor $b = 0, 2, 4, 6$ vagy 8 lehet. A keresett számok: **2024, 2226 és 2428** - Ha $a = 4$, akkor $b = 0, 2, 4, 6$ vagy 8 lehet. A keresett számok: **4044, 4246 és 4448** - Ha $a = 6$, akkor $b = 0, 2, 4, 6$ vagy 8 lehet. A keresett számok: **6064, 6266 és 6468** - Ha $a = 8$, akkor $b = 0, 2, 4, 6$ vagy 8 lehet. A keresett számok: **8084, 8286 és 8488.** **b)** Kati által leírt számok: **8488 8286 8084 6468 6266 6064 4448 4246 4044 2428 2226 2024** Mivel minden szám négyjegyű, a 21. számjegy a 6. szám első számjegye, azaz a 6-os lesz.	**8 pont:** **6p: (12x0,5p)** helyesen felírt számok **2p:** A számok csökkenő sorrendben való felírása, és a 21. számjegy megnevezése. ***Megjegyzés:*** *Minden hibásan felírt szám – 0,1 pont*
Felelet: a) 12 ilyen szám van. **b)** A 21. számjegy a 6-os.	**2p**: helyes feleletek
Összpontszám:	**10 pont**

3. feladat

Robi meg szeretne nézni egy mérkőzést egy olyan stadionban, ahol a nézőtér minden sorában 90 számozott ülőhely van. A sorokban az ülőhelyek számozása folyamatos, így a második sor a 91-es számú hellyel kezdődik. Robi a 757. ülőhelyre kapott belépőjegyet, de így is kétszer annyi sor van még mögötte, mint előtte. Hány embernek nem jutna ülőhely, ha 2700 szurkoló szeretné a mérkőzést megnézni?

Megoldás:

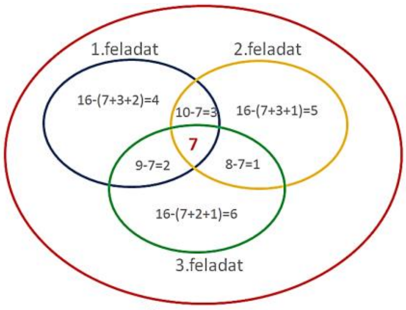
- Ha Robi a 757. ülőhelyre kapott belépőjegyet, és minden sorban 90 hely van, akkor ülőhelye a **9. sorban** van, mivel: $8 \times 90 = 720 < 757$ - Ha Robi előtt 8 sor van, és mögötte kétszer annyi sor van, mint előtte, akkor $2 \times 8 = 16$ sor van a háta mögött. Így a nézőtéren levő **sorok száma**: $8 + 1 + 16 = \mathbf{25}$ - Az **ülőhelyek száma**: $25 \times 90 = \mathbf{2250}$ - Az **ülőhely nélkül maradó személyek száma**: $2700 - 2250 = 450$	**9 pont** **3p:** annak meghatározása, hogy hányadik sorban van Robi ülőhelye **3p:** a nézőtéren levő sorok számának meghatározása **2p:** az ülőhelyek számának meghatározása **1p:** az ülőhely nélkül maradó személyek számának meghatározása
Felelet: 450 szurkolónak nem jut ülőhely.	**1p:** helyes felelet
Összpontszám:	**10 pont**

4. feladat

Egy matematikaversenyen 30 tanuló vett részt. A megoldásra kitűzött feladatsor három feladatból állt. Az első feladatot 16 tanuló, a második feladatot 16 tanuló, a harmadik feladatot szintén 16 tanuló oldotta meg. A verseny első és második feladatát 10 tanuló, az első és harmadik feladatát 9 tanuló, a második és harmadik feladatát 8 tanuló oldotta meg, 7 tanulónak pedig sikerült mind a három feladatot helyesen megoldania.

a) Hány tanulónak sikerült csak egy feladatot megoldania? Készíts ábrát! Vezesd le a megoldást lépésről lépésre!
b) Hány tanulónak nem sikerült egyetlen feladatot sem megoldania helyesen?

Megoldás:

a) Össz. 30 gyerek	**10 pont:** **3p**: helyes ábra elkészítése
- Ha 7 tanulónak sikerült mindhárom feladatot helyesen megoldania és 10 tanulónak sikerült az 1. és 2. feladatot helyesen megoldania, akkor 10-7=**3 tanuló csak az 1. és 2. feladatot oldotta meg** helyesen.	**1p**: az 1. és 2. feladatot helyesen megoldó tanulók számának kiszámítása
- Ha 7 tanulónak sikerült mindhárom feladatot helyesen megoldania és 9 tanulónak sikerült az 1. és 3. feladatot helyesen megoldania, akkor 9-7=**2 tanuló csak az 1. és 3. feladatot oldotta** meg helyesen.	**1p**: az 1. és 3. feladatot helyesen megoldó tanulók számának kiszámítása
- Ha 7 tanulónak sikerült mindhárom feladatot helyesen megoldania és 8 tanulónak sikerült az 2. és 3. feladatot helyesen megoldania, akkor 8-7=**1 tanuló csak az 2. és 3. feladatot oldotta** meg helyesen.	**1p**: a 2. és 3. feladatot helyesen megoldó tanulók számának kiszámítása
- **Csak az 1. feladatot** oldotta meg → 16-(3+7+2)=**4 tanuló** - **Csak a 2. feladatot** oldotta meg → 16-(3+7+1) =**5 tanuló** - **Csak a 3. feladatot** oldotta meg → 16- (2+7+1)=**6 tanuló**	**1,5p**: csak az 1., vagy a 2., vagy a 3. feladatot helyesen megoldó tanulók számának kiszámítása
- **Egyetlen feladatot** oldott meg → 4+5+6= **15 tanuló**	**0,5p**: egyetlen feladatot megoldó tanulók számának meghatározása
b) **Egyetlen feladatot sem** oldott meg →30-(15+7+3+2+1)=**2 tanuló**	**2p**: azon tanulók számának kiszámítása, akik egyetlen feladatot sem oldottak meg ***Megjegyzés:*** *Minden helyes megoldás 10 ponttal értékelendő.*

Felelet: a) 15 tanuló csak egy feladatot oldott meg. b) 2 tanuló egyetlen feladatot sem oldott meg.	**2p**: helyes feleletek
Összpontszám:	**12 pont**

5. feladat

1802-ben Kolozsváron egy különleges gyermek született, Bolyai János. Minden idők egyik legnagyobb és legforradalmibb matematikusa Marosvásárhelyen nevelkedett. Kilencéves korában apja, Bolyai Farkas, komoly tanulásra fogta, és hamar kiderült, hogy rendkívüli tehetsége van a matematikához. A család anyagi helyzete nem tette lehetővé, hogy híres egyetemen tanulhasson, így a bécsi Hadmérnöki Akadémiára került, ahol mindjárt a 4. évfolyamon kezdett el tanulni. Tanulmányai elvégzése után hadmérnökként állt katonai szolgálatba, és előbb hadnagyi, majd főhadnagyi, később kapitányi rangot kapott. 1833-ban betegsége miatt kérte nyugdíjaztatását, és visszaköltözött Marosvásárhelyre, ahol matematikai kutatásokkal foglakozott. 58 éves korában, 1860. január 27-én hunyt el egy betegség következtében.

Ha megfejted az alábbi összeadást, megtudhatod, hogy 1802. hányadik hónapjában született Bolyai János.

Az összeadásban az azonos betűk azonos, a különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.

a) Melyik betű milyen számjegyet jelöl? Írd le, hogyan gondolkodtál!
b) Hányadik hónapban született Bolyai János? *(A hónap sorszámát az OS betűk helyére kerülő számjegyek adják meg.)*

J	**Á**	**N**	**O**	**S**	**+**
	Á	**N**	**O**	**S**	
		N	**O**	**S**	
			O	**S**	
				S	
6	**4**	**1**	**5**	**0**	

Megoldás:

A J betű 6, 5, 4 számjegyeket jelölhet. - Ha $J = 4$ → $Á + Á = 24$ vagy $Á + Á + 1 = 24$ vagy $Á + Á + 2 = 24$, vagy $Á + Á + 3 = 24$. Egyik összeadás sem lehetséges, mert Á számjegy, így $Á + Á \leq 18$ - Ha **J=5**, →$Á + Á = 14$, vagy $Á + Á + 1 = 14$, vagy $Á + Á + 2 = 14$, vagy $Á + Á + 3 = 14$ • Ha $Á + Á = 14$, → $Á = 7$. Így $N + N + N = 1$, nem lehetséges. • Ha $Á + Á + 1 = 14$, → $Á + Á = 13$, nem lehetséges. • Ha $Á + Á + 2 = 14$ → $Á = \mathbf{6}$. Így $N + N + N = 21$, vagy $N + N + N + 1 = 21$, vagy $N + N + N + 2 = 21$, vagy $N + N + N + 3 = 21$	**10 pont:** Minden számjegy meghatározása a megfelelő indoklással 2-2 pont (összesen 5x2=10pont) *Megjegyzés*: Ha csak az összeadást írja le a helyes számjegyekkel, akkor 5 pontot kap (minden helyes számjegy 1-1 pont).

- Ha $N+N+N=21$, → $\boldsymbol{N=7}$
  Az összeadás alapján $O+O+O+O=5$ vagy
  $O+O+O+O+1=5$, vagy $O+O+O+O+2=5$, vagy
  $O+O+O+O+3=5$, vagy $O+O+O+O+4=5$
  - Ha $O+O+O+O=5$, nem lehetséges
  - Ha $O+O+O+O+1=5$, → $\boldsymbol{O=1}$,
    vagyis $S+S+S+S+S=10$, így $\boldsymbol{S=2}$
  - Ha $O+O+O+O+2=5$, nem lehetséges
  - Ha $O+O+O+O+3=5$, nem lehetséges
  - Ha $O+O+O+O+4=5$, nem lehetséges
- Ha $N+N+N+1=21$, → $N+N+N=20$, nem lehetséges
- Ha $N+N+N+2=21$ → $N+N+N=19$, nem lehetséges
- Ha $N+N+N+3=21$ → $N+N+N=18$, vagyis $N=6$
  Így $O+O+O+O=35$, vagy $O+O+O+O+1=35$,
  vagy $O+O+O+O+2=35$, vagy O+O+O+O+3=35,
  vagy $O+O+O+O+4=35$
  - Ha $O+O+O+O=35$, nem lehetséges
  - Ha $O+O+O+O+1=35$, nem lehetséges
  - Ha $O+O+O+O+2=35$, nem lehetséges
  - Ha $O+O+O+O+3=35$, → O=8 és
    $S+S+S+S+S=30$, vagyis $S=6$.
    Mivel $Á=6$, ez nem lehetséges, mert különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.
  - Ha $O+O+O+O+4=5$, nem lehetséges

- Ha $Á+Á+3=14$, → $Á+Á=11$, nem lehetséges.

- Ha $J=6$, → $Á+Á=4$ vagy $Á+Á+1=4$ vagy $Á+Á+2=4$ vagy $Á+Á+3=4$

- Ha $Á+Á=4$, → $Á=2$. Így $N+N+N=1$, nem lehetséges.
- Ha $Á+Á+1=4$, → Á+Á=3 nem lehetséges.
- Ha $Á+Á+2=4$, → $Á=1$ és $N+N+N=21$, vagy
  $N+N+N+1=21$, vagy $N+N+N+2=21$, vagy
  $N+N+N+3=21$
  - Ha $N+N+N=21$, → $N=7$. Így $O+O+O+O=5$, vagy
    $O+O+O+O+1=5$, vagy $O+O+O+O+2=5$, vagy
    $O+O+O+O+3=5$, vagy $O+O+O+O+4=5$
    - Ha $O+O+O+O=5$, nem lehetséges
    - Ha $O+O+O+O+1=5$, → $O=1$, de $Á=1$, nem lehetséges, mert különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.
    - Ha $O+O+O+O+2=5$, nem lehetséges
    - Ha $O+O+O+O+3=5$, nem lehetséges

▪ Ha $O + O + O + O + 4 = 5$, nem lehetséges ○ Ha $N + N + N + 1 = 21, \rightarrow N + N + N = 20$, nem lehetséges ○ Ha $N + N + N + 2 = 21 \rightarrow N + N + N = 19$, nem lehetséges ○ Ha $N + N + N + 3 = 21, \rightarrow N + N + N = 18$, vagyis $N = 6$ Így $O + O + O + O = 35$, vagy $O + O + O + O + 1 = 35$, vagy $O + O + O + O + 2 = 35$, vagy $O + O + O + O + 3 = 35$, vagy $O + O + O + O + 4 = 35$ ▪ Ha $O + O + O + O = 35$, nem lehetséges ▪ Ha $O + O + O + O + 1 = 35$, nem lehetséges ▪ Ha $O + O + O + O + 2 = 35$, nem lehetséges ▪ Ha $O + O + O + O + 3 = 35, \rightarrow O = 8$ és $S + S + S + S + S = 30$, vagyis $S = 6$, de $N = 6$. Nem lehetséges, mert különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek. ▪ Ha $O + O + O + O + 4 = 5$, nem lehetséges • Ha $Á + Á + 3 = 4 \rightarrow Á + Á = 1$, nem lehetséges **Tehát** $\boldsymbol{J = 5}$, $\boldsymbol{Á = 6}$, $\boldsymbol{N = 7}$, $\boldsymbol{O = 1}$, $\boldsymbol{S = 2}$ Bolyai János a **12. hónapban**, azaz decemberben született.	
Felelet: $J = 5$, $Á = 6$, $N = 7$, $O = 1$, $S = 2$ Bolyai János a 12. hónapban, azaz decemberben született.	**2p**: helyes feleletek
Összpontszám:	**12 pont**

Egyenlő pontszám esetén az elsőbbség meghatározásakor a feladatokat a következőképpen rangsoroljuk: 4-es, 5-ös, 1-es, 3-as és 2-es