



XXIV. BRENÝÓ MIHÁLY REGIONÁLIS PONTSZERZŐ
MATEMATIKÁVERSENY
3-4. osztály
2024-2025-ös tanév



MEGOLDÁSOK

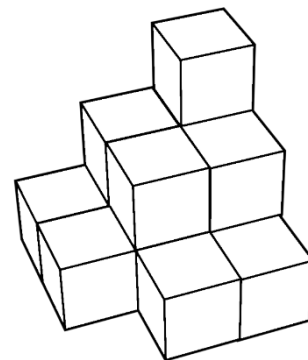
3. forduló

1. feladat:

a) Marika kis kockákkal játszik.

Legkevesebb hány kis kocka hiányzik ahhoz, hogy az ábrán levő elkezdett építmény egy nagy kockává alakuljon?

Írd le, hogyan gondolkodtál!



b) Péter, Marika bátyja, dobókockákból építi meg az ábrán látható építményt úgy, hogy a **nem** látható lapokon levő pöttyök összege a lehető legkisebb legyen.

Legkevesebb hány pötty lesz összesen az építményt alkotó dobókockák nem látható lapjain? Vedd figyelembe az építmény teljes felületét!

Írd le lépésről lépésre, hogyan gondolkodtál!

(Egy dobókocka lapjai 1-től 6-ig pontozottak, és a szemben fekvő lapokon a pöttyök összege mindig 7.)

Megoldás:

a) Az elkezdett építményt a legkevesebb kocka felhasználásával kell egy nagy kockává alakítani. Egy kockának minden oldaléle azonos hosszúságú kell legyen.

Amint az ábrán látható, az építménynek három szintje van. Minden szinten három sorban és három oszlopban kell elhelyezni a kis kockákat, így szintenként $3 \times 3 = 9$ kis kockára lesz szükség.

Marika az alsó szinten három sorban kezdte elhelyezni a kockákat. Mindhárom sorban három kis kocka kell legyen. Mivel az első sorban csak kettő van, ide egy kis kockát kell pótolni.

A középső szinten a már meglévő $2 + 2 = 4$ kis kockát $9 - 4 = 5$ kis kockával kell kiegészíteni.

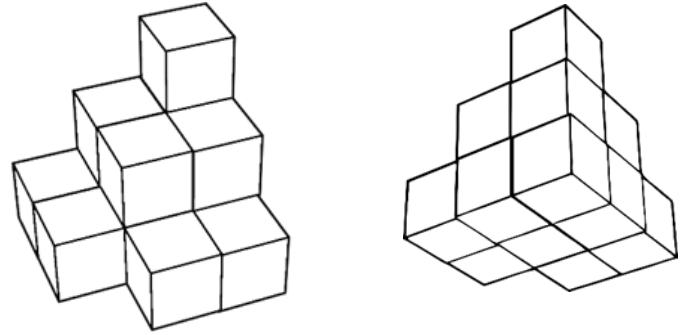
A felső szinten csak egy kis kocka van, ezért ide $9 - 1 = 8$ kis kockát kell tenni.

A pótolts kis kockák száma megmutatja, hogy $1 + 5 + 8 = 14$ kis kockával kell kiegészíteni az építményt ahhoz, hogy egy nagy kocka alakuljon ki belőle.

Felelet:

Legkevesebb 14 kis kocka kell ahhoz, hogy az elkezdett építményt egy nagy kockává lehessen alakítani.

- b) Egy kockának 6 oldallapja van.
Egy dobókocka lapjai 1-től 6-ig
pontosítottak.



felső szint	középső szint		alsó szint		
13	12	10	8	5	2
	11	9	7	4	1
			6	3	

Az indoklás megkönnyítése
érdekében megrajzoljuk külön-külön
az építmény szintjeinek alaprajzát,
és megszámozzuk a dobókockákat.

Összeszámoljuk a dobókockák nem látható lapjain levő pöttyöket.

- A felső szinten levő kis dobókockának (13-as kocka) egyetlen lapja nem látható, ezért Péter úgy fordítja a kockát, hogy a nem látható lapon **egy pötty** legyen.
- Két lapja nem látható 4 dobókockának. Ezek az alsó szinten vannak (1-es, 2-es, 3-as és 6-os), nincs rajtuk kocka a középső szinten. Péter úgy fordítja a kockákat, hogy 1 és 2 pötty legyen a nem látható oldalakon. Egy ilyen dobókocka nem látható lapjain: $1 + 2 = 3$ pötty van.
Négy ilyen dobókocka nem látható lapjain $4 \times 3 = \mathbf{12}$ pötty van.
- Három lapja nem látható 4 dobókockának. Három ilyen kocka a középső szinten van (9-es, 10-es és 11-es kocka), egy pedig az alsó szinten helyezkedik el (8-as kocka). Péter úgy fordítja ezeket a dobókockákat, hogy 1, 2, illetve 3 pötty legyen a nem látható lapjaikon.
Egy ilyen dobókocka nem látható lapjain $1 + 2 + 3 = 6$ pötty van.
Négy ilyen dobókocka nem látható lapjain $4 \times 6 = \mathbf{24}$ pötty van.
- Négy lapja nem látható 3 dobókockának. Az ilyen kockákból kettő az alsó szinten helyezkedik el (5-ös és 7-es kocka), egy pedig a középső szinten van (12-es kocka). Péter úgy fordítja ezeket a kockákat, hogy 1, 2, 3, illetve 4 pötty legyen a nem látható lapjaikon.
Egy ilyen dobókocka nem látható lapjain $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ pötty van.
Három ilyen dobókocka nem látható lapjain $3 \times 10 = \mathbf{30}$ pötty van.
- Öt lapja nem látható annak az egyetlen kockának, amelyik az alsó szint középső sorában középen van (4-es kocka). Péter úgy fordítja ezt a kockát, hogy 1, 2, 3, 4, illetve 5 pötty legyen a nem látható lapjain, így ezen a kockán $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \mathbf{15}$ pötty nem látható.
Az építményt alkotó dobókockák nem látható lapjain $1 + 12 + 24 + 30 + 15 = 82$ pötty van összesen.

Felelet:

Legkevesebb 82 pötty van az építményt alkotó dobókockák nem látható lapjain.

Pontozás:

- a) 1 pont: az alsó szinten hiányzó kis kockák számának helyes meghatározása, indoklás
1 pont: a középső szinten hiányzó kis kockák számának helyes meghatározása, indoklás
1 pont: a felső szinten hiányzó kis kockák számának helyes meghatározása, indoklás
1 pont: a hiányzó kis kockák számának helyes összesítése
- b) 1 pont: annak meghatározása, hogy hány pötty van az egyetlen nem látható lappal rendelkező dobókocka láthatatlan lapján, indoklás
1 pont: annak meghatározása, hogy összesen hány pötty van a két nem látható lappal rendelkező dobókockák láthatatlan lapjain, indoklás
1 pont: annak meghatározása, hogy összesen hány pötty van a három nem látható lappal rendelkező dobókockák láthatatlan lapjain, indoklás
1,5 pont: annak meghatározása, hogy összesen hány pötty van a négy nem látható lappal rendelkező dobókockák láthatatlan lapjain, indoklás
1,5 pont: annak meghatározása, hogy összesen hány pötty van az öt nem látható lappal rendelkező dobókocka láthatatlan lapjain, indoklás
1 pont: a nem látható lapokon levő pöttyök számának helyes összesítése
2 pont: helyes feleletek (1 pont/felelet)

Összpontszám: 13 pont

*A feladat másféle helyes megoldása is elfogadható,
és a fenti pontozás mintájára értékelhető.*

2. feladat:

Szilveszter kedveli a matematikát. Amikor az óévtől búcsúzott, megállapította, hogy a 2024 olyan négyjegyű szám, amely maradék nélkül osztható 11-gyel és 23-mal, majd megkereste az összes 5000-nél kisebb négyjegyű számot is, amelyek maradék nélkül oszthatók 11-gyel és 23-mal.

- a) Hány ilyen tulajdonsággal rendelkező számot talált?
Írd le lépésről lépésre, hogyan gondolkodtál!
- b) Mennyivel egyenlő a talált számok közül a hárommal oszthatók összege?
Válaszod indokold!

Megoldás:**1. megoldás:**

a) Olyan számokat keresünk, amelyek maradék nélkül oszthatók 11-gyel és 23-mal, vagyis $11 \times 23 = 253$ -mal. Ezek a számok a 253 többszörösei.

$253 \times 2 = 506$ nem négyjegyű szám, nem megfelelő.

$253 \times 3 = 759$ nem négyjegyű szám, nem megfelelő.

$253 \times 4 = 1012$ a legkisebb négyjegyű szám, amely maradék nélkül osztható 11-gyel és 23-mal.

$$253 \times 5 = 1265$$

$$253 \times 7 = 1771$$

$$253 \times 6 = 1518$$

$$253 \times 8 = 2024$$

$$253 \times 9 = 2277$$

$$253 \times 10 = 2530$$

$$253 \times 11 = 2783$$

$$253 \times 12 = 3036$$

$$253 \times 13 = 3289$$

$$253 \times 14 = 3542$$

$$253 \times 15 = 3795$$

$$253 \times 16 = 4048$$

$$253 \times 17 = 4301$$

$$253 \times 18 = 4554$$

$$253 \times 19 = 4807$$

$$253 \times 20 = 5060 \text{ nagyobb mint } 5000, \text{ nem megfelelő.}$$

A keresett számok a következők: 1012, 1265, 1518, 1771, 2024, 2277, 2530, 2783, 3036, 3289, 3542, 3795, 4048, 4301, 4554, 4807.

Felelet: Szilveszter **16** olyan négyjegyű számot talált, amely 5000-nél kisebb, valamint osztható 11-gyel és 23-mal.

b) A kapott számok közül kiválasztjuk azokat, amelyek oszthatók 3-mal.

Azok a számok oszthatók 3-mal, amelyeket úgy kaptunk meg, hogy a 253-at 3-mal osztható számmal szoroztuk, vagy a számjegyeik összegét maradék nélkül el tudjuk osztani 3-mal. Ezek a következők: 1518, 2277, 3036, 3795 és 4554.

Összegük: $1518 + 2277 + 3036 + 3795 + 4554 = 15180$.

Felelet: A hárommal osztható számok összege 15180.

2. megoldás:

a) Olyan számokat keresünk, amelyek maradék nélkül oszthatók 11-gyel és 23-mal, vagyis $11 \times 23 = 253$ -mal. Ezek a számok a 253 többszörösei.

- Meghatározzuk a legkisebb négyjegyű számot, amely osztható 253-mal:

$$1000 : 253 = 3, \text{ maradék } 241 \rightarrow \text{a keresett szám: } 253 \times 4 = 1012$$

- Meghatározzuk a legnagyobb, 5000-nél kisebb négyjegyű számot, amely osztható 253-mal:

$$5000 : 253 = 19, \text{ maradék } 193 \rightarrow \text{a keresett szám: } 253 \times 19 = 4807$$

- Ha a legkisebb szám 253×4 , a legnagyobb pedig 253×19 , akkor $19 - 4 + 1 = 16$ darab négyjegyű, 5000-nél kisebb, 11-gyel és 23-mal osztható szám létezik.

Felelet: Szilveszter **16** olyan négyjegyű számot talált, amely 5000-nél kisebb, valamint osztható 11-gyel és 23-mal.

b) Azokat a négyjegyű, 5000-nél kisebb számokat keressük, amelyek oszthatók 11-gyel, 23-mal és 3-mal, vagyis $11 \times 23 \times 3 = 253 \times 3 = 759$ -cel.

- Meghatározzuk a legkisebb négyjegyű számot, amely osztható 759-cel:

$$1000 : 759 = 1, \text{ maradék } 241 \rightarrow \text{a keresett szám } 759 \times 2 = 1518$$

- Meghatározzuk a legnagyobb négyjegyű, 5000-nél kisebb, 759-cel osztható számot:

$$5000 : 759 = 6, \text{ maradék } 446 \rightarrow \text{a keresett szám } 759 \times 6 = 4554$$

- Meghatározzuk a kért tulajdonságokkal rendelkező számokat:

$$2 \times 759; 3 \times 759; 4 \times 759; 5 \times 759; 6 \times 759$$

- Kiszámítjuk a kapott számok összegét:

$$\begin{aligned} 2 \times 759 + 3 \times 759 + 4 \times 759 + 5 \times 759 + 6 \times 759 = \\ = 759 \times (2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 759 \times 20 = 15180 \end{aligned}$$

Felelet: A hárommal osztható számok összege 15180.

Pontozás:

- a) 1 pont: a legkisebb négyjegyű, 11-gyel és 23-mal maradék nélkül osztható szám meghatározása, indoklás
4,5 pont: a további számok meghatározása (0,3 pont/szám)
0,5 pont: annak meghatározása, hogy hány szám rendelkezik a kért tulajdonságokkal
Vagy
2 pont: a legkisebb négyjegyű, 11-gyel és 23-mal maradék nélkül osztható szám meghatározása, indoklás
2 pont: a legnagyobb négyjegyű, 11-gyel és 23-mal maradék nélkül osztható szám meghatározása, indoklás
2 pont: annak meghatározása, hogy hány szám rendelkezik a kért tulajdonságokkal, indoklás
- b) 2,5 pont: a hárommal osztható számok meghatározása, indoklás (0,5 pont/szám)
1,5 pont: a hárommal osztható számok összegének kiszámítása
2 pont: helyes feleletek (1 pont/felelet)

Összpontszám: 12 pont

3. feladat:

Milák Kristófot, a kétszeres olimpiai, háromszoros világ-, nyolcszoros Európa- és háromszoros ifjúsági olimpiai bajnokot megkérdezték, hogy a párizsi olimpián hányadik lett 200 m-es pillangóúszásban.

A 24 éves bajnok így válaszolt: *Ha a helyezésem sorszámát megszorozom 2-vel, a szorzathoz hozzáadok 3-at, majd az így kapott összeget megszorozom 4-gyel, a szorzatból kivonok 5-öt, a különbséget megszorozom 6-tal, majd hozzáadok 7-et, akkor a legkisebb háromjegyű számnál 3-mal kisebb számot kapok.*

Hányadik helyezett lett Milák Kristóf a párizsi olimpián?

Írd le lépésről lépésre, hogyan gondolkodtál!

1. megoldás:

Jelöljük Kristóf helyezését a -val. Az elmondottak alapján felírhatjuk a következő műveletsort: $[(a \times 2 + 3) \times 4 - 5] \times 6 + 7$, amelynek eredménye a legkisebb háromjegyű számnál 3-mal kisebb, vagyis $100 - 3 = 97$.

Alkalmazzuk a fordított út módszerét:

$$[(a \times 2 + 3) \times 4 - 5] \times 6 + 7 = 97$$

$$[(a \times 2 + 3) \times 4 - 5] \times 6 = 97 - 7$$

$$[(a \times 2 + 3) \times 4 - 5] \times 6 = 90$$

$$(a \times 2 + 3) \times 4 - 5 = 90 : 6$$

$$(a \times 2 + 3) \times 4 - 5 = 15$$

$$(a \times 2 + 3) \times 4 = 15 + 5$$

$$(a \times 2 + 3) \times 4 = 20$$

$$a \times 2 + 3 = 20 : 4$$

$$a \times 2 + 3 = 5$$

$$a \times 2 = 5 - 3$$

$$a \times 2 = 2$$

$$a = 2 : 2$$

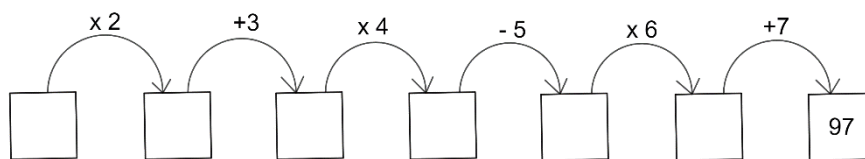
$$a = 1$$

Felelet: Milák Kristóf 1. helyezett lett.

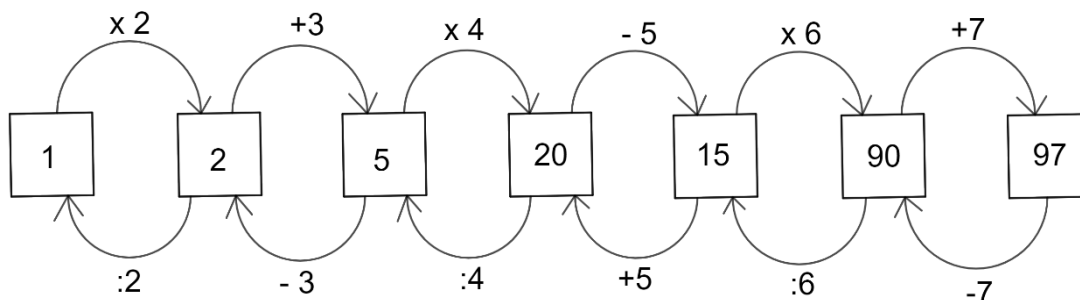
2. megoldás:

A legkisebb háromjegyű szám 100, ennél 3-mal kisebb szám a $100 - 3 = 97$.

Felrajzoljuk a feladat utasításait:



A fordított út módszerét alkalmazva kiszámítjuk, hányadik helyezett lett Kristóf.



Felelet: Milák Kristóf 1. helyezett lett.

Pontozás:

1 pont: a legkisebb háromjegyű számnál 3-mal kisebb szám meghatározása

3 pont: a műveletsor helyes felírása vagy ábra

6 pont: a fordított út módszerének alkalmazása (műveletenként/lépésenként 1 pont)

1 pont: a helyezés meghatározása

1 pont: helyes felelet

Összpontszám: 12 pont

4. feladat

Egy 100 m-es síkfutás döntőjén András, Béla, Csaba, Dani, Endre, Fülöp és Géza vett részt.

- Dani előtt feleannyian értek célba, mint amennyien őt követően futottak be.
- András Dani előtt futott célba.
- Géza előtt ugyanannyian értek célba, mint amennyien utána érkeztek.
- Fülöp megelőzte barátját, Endrét.
- Béla nem lett utolsó.
- Csaba világrekordot döntött.
- A döntőn nem volt holtverseny.

Ki hányadik helyezést ért el? Válaszod indokold!

Megoldás:

7-en indultak a 100 méteres síkfutás döntőjén.

Mivel Géza előtt ugyanannyian értek célba, mint amennyien utána, Géza a mezőny közepén végzett. Előtte, illetve mögötte $(7 - 1) : 2 = 6 : 2 = 3$ versenyző volt, azaz Géza 4. helyezett lett.

Dani előtt feleannyian értek célba, mint amennyien utána, vagyis kétszer többen érkeztek célba őt követően, mint ahányan megelőzték őt. Jelöljük a -val a Dani előtt célba futó versenyzőket:



$$3 \times a = 7 - 1 \Rightarrow a = 6 : 3 = 2$$

Tehát Dani előtt ketten futottak célba, őt követően pedig négyen, így Dani 3. helyezett lett.

Csaba világrekordot döntött, vagyis Csaba lett az 1. helyezett.

András Dani előtt ért célba, tehát András 2. lett.

Ha Fülöp megelőzte barátját, Endrét, és Béla nem lett utolsó, akkor Endre lett a 7., Fülöp meg Béla pedig Endre előtt ért célba.

Mivel nincs információ arról, hogy Béla és Fülöp közül ki ért hamarabb célba, két lehetséges sorrend van: 1. Csaba, 2. András, 3. Dani, 4. Géza, 5. Béla, 6. Fülöp, 7. Endre, vagy 1. Csaba, 2. András, 3. Dani, 4. Géza, 5. Fülöp, 6. Béla, 7. Endre.

Felelet: Csaba 1. helyezett, András 2. helyezett, Dani 3. helyezett, Géza 4. helyezett, Béla 5. helyezett, Fülöp 6. helyezett, Endre 7. helyezett,

vagy: Csaba 1. helyezett, András 2. helyezett, Dani 3. helyezett, Géza 4. helyezett, Fülöp 5. helyezett, Béla 6. helyezett, Endre 7. helyezett.

1. helyezett	2. helyezett	3. helyezett	4. helyezett	5. helyezett	6. helyezett	7. helyezett
Csaba	András	Dani	Géza	Béla	Fülöp	Endre
Csaba	András	Dani	Géza	Fülöp	Béla	Endre

Pontozás:

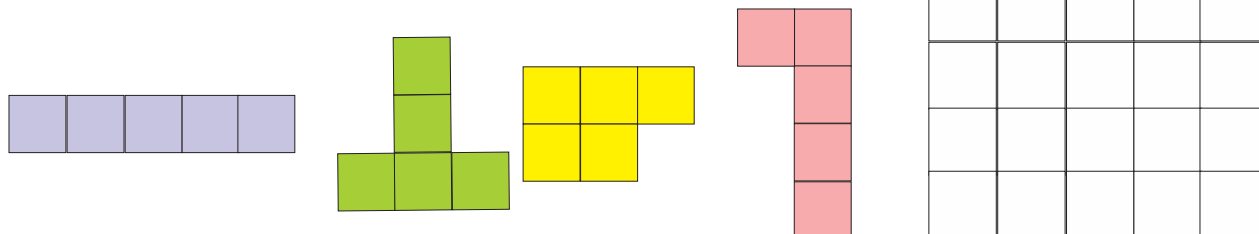
- 2 pont: Géza helyezésének meghatározása, indoklás
- 2 pont: Dani helyezésének meghatározása, indoklás
- 1 pont: Csaba helyezésének meghatározása
- 2 pont: András helyezésének meghatározása, indoklás
- 2 pont: Endre helyezésének meghatározása, indoklás
- 1 pont: Béla helyezésének meghatározása
- 1 pont: Fülöp helyezésének meghatározása
- 1 pont: a helyes feleletek felírása (0,5 pont/felelet)

Összpontszám: 12 pont

5. feladat

Misi az alábbi formákkal egy 5x5-ös négyzetrácsot próbál lefedni. Egy lefedés alkalmával egy-vagy többféle formát is felhasználhat. Milyen mintákat tud kirakni Misi, ha az alábbi formákat szükség esetén tükrözéssel, forgatással is felhasználta?

Találj minél több megoldást! Rajzold le a mintákat! (Két minta akkor különbözik, ha sem elforgatással, sem tükrözéssel nem fedik egymást.)



Megoldás

Az ábrákon feltüntetett mintákon kívül még léteznek megoldások. Ezeket is a megadott pontozás szerint értékeljük.

Pontozás:

Az első tíz helyes minta 10 pontot ér (1 pont/minta).
Minden további helyes megoldás 0,3 pontot ér.

